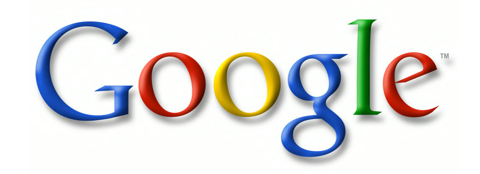
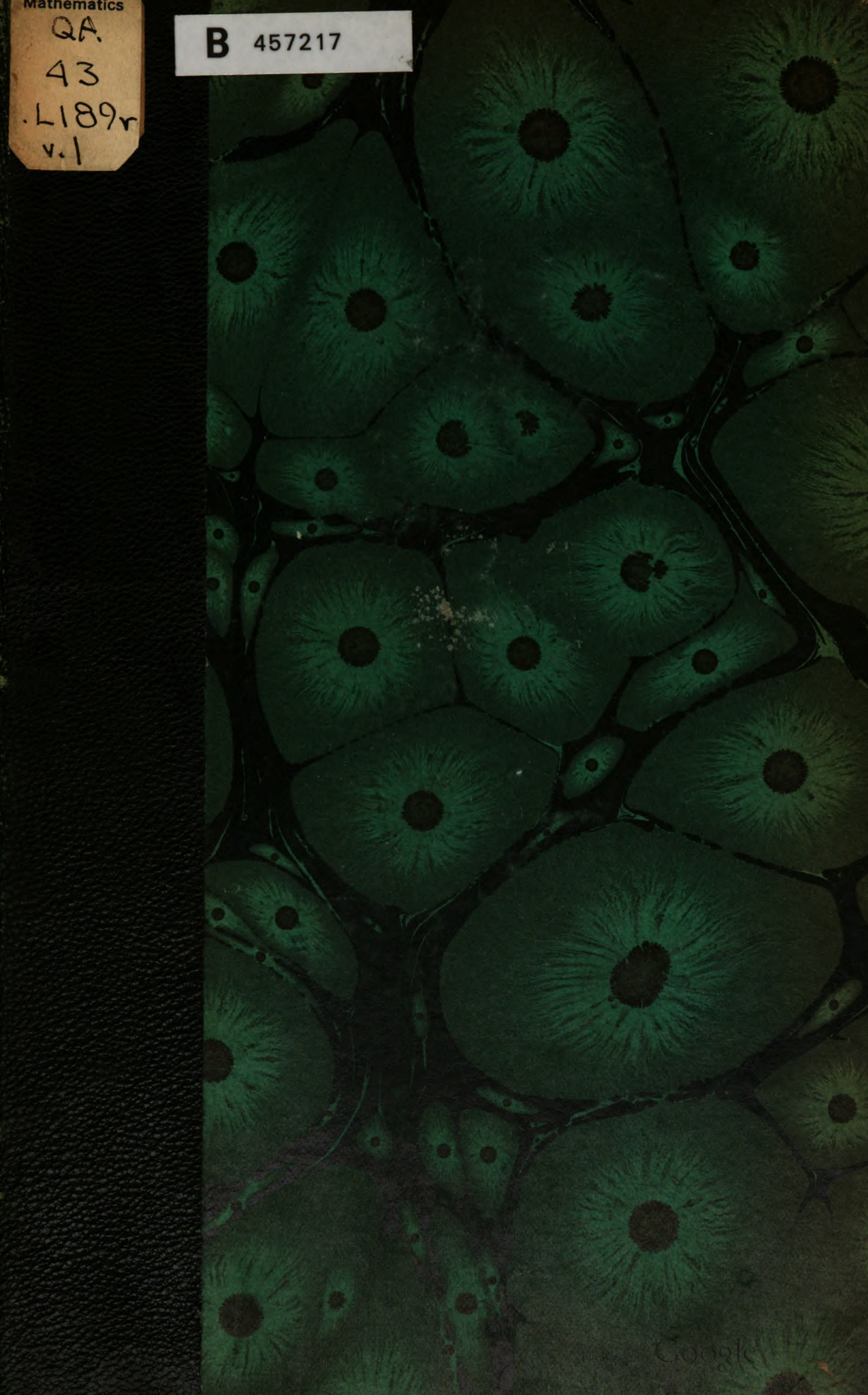
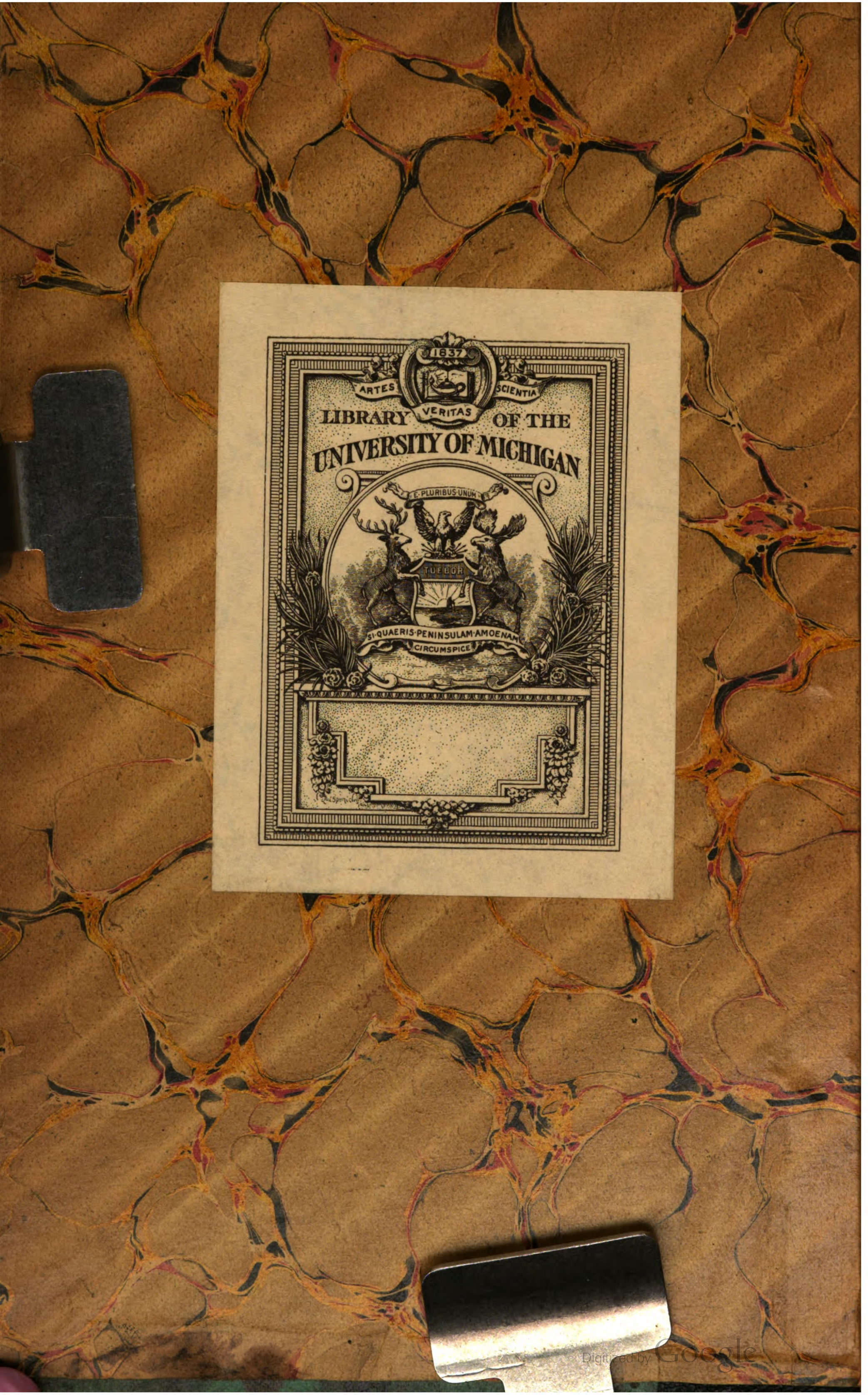
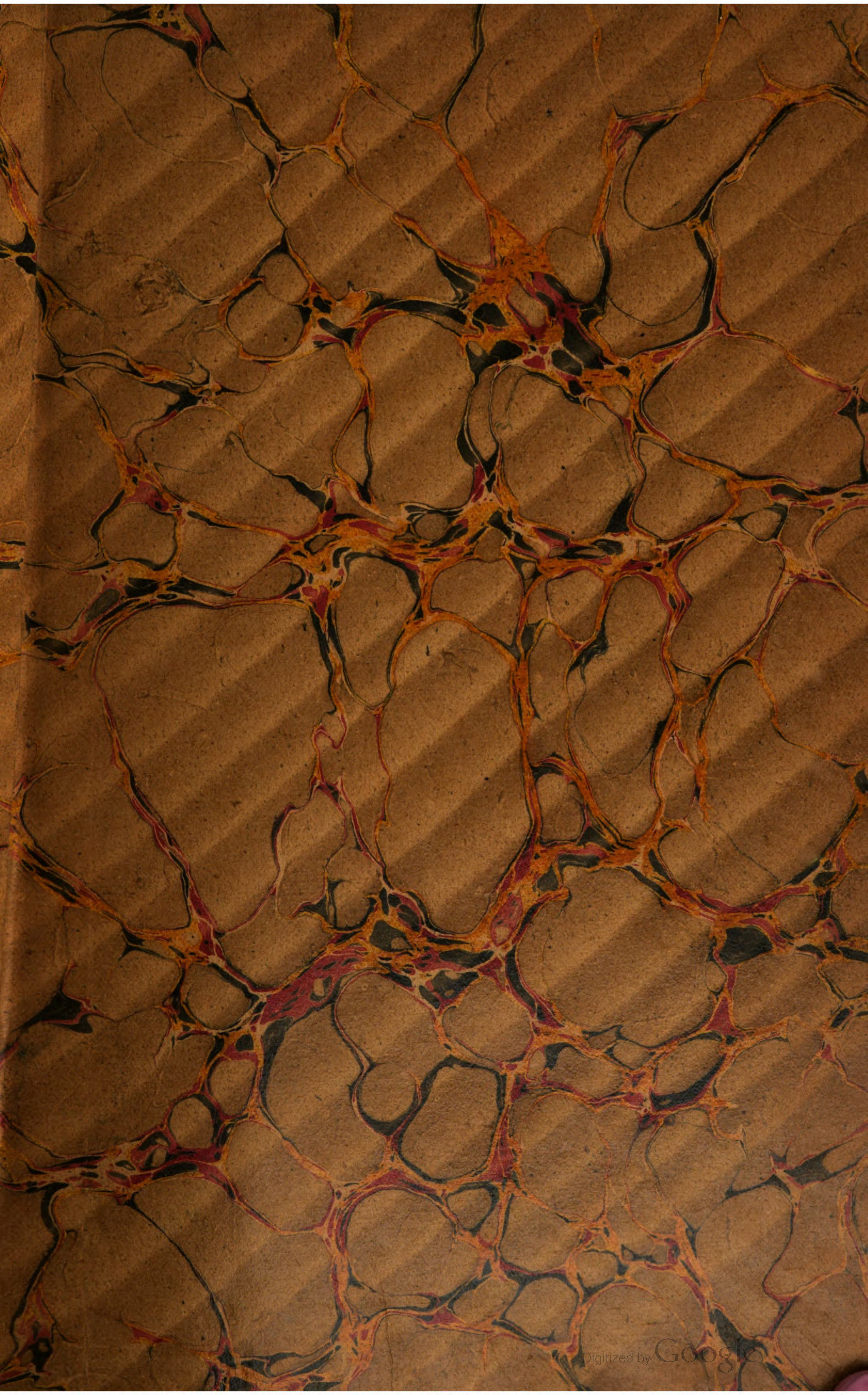



Mathematics
QA
43
.L189r
v.1
B 457217
Google


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
Digitized by Google



RECUEIL

DE

PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

CLASSÉS PAR DIVISIONS SCIENTIFIQUES

CONTENANT

LES ÉNONCÉS, AVEC RENVOI AUX SOLUTIONS, DE TOUS LES PROBLÈMES POSÉS DEPUIS L'ORIGINE DANS DIVERS JOURNAUX :

Nouvelles Annales de Mathématiques,
Journal de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales,
Mathesis, Nouvelle Correspondance mathématique.

DIVISION DE L'OUVRAGE.

A l'usage des classes de Mathématiques élémentaires.

I. — Arithmétique. — Algèbre élémentaire. — Trigonométrie.

II. — Géométrie à deux dimensions. — Géométrie à trois dimensions. — Géométrie descriptive.

A l'usage des classes de Mathématiques spéciales.

III. — Algèbre. — Théorie des nombres. — Probabilités. — Géométrie de situation.

IV. — Géométrie analytique à deux dimensions (et Géométrie supérieure).

V. — Géométrie analytique à trois dimensions (et Géométrie supérieure).

VI. — Géométrie du triangle.

A l'usage des candidats à la Licence.

VII. — Calcul infinitésimal et Calcul des fonctions. — Mécanique. — Astronomie.

Laisant, Charles Ange, 1841-1920

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES.

ARITHMÉTIQUE.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

TRIGONOMÉTRIE.

A L'USAGE DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès sciences,

Ancien élève de l'École Polytechnique.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

AVERTISSEMENT.

Les Questions dont on trouvera les énoncés dans cet Ouvrage sont extraites des principaux Recueils mathématiques périodiques publiés en langue française depuis la création des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, c'est-à-dire depuis 1842. Je n'ai eu d'autre mérite que d'en faire une classification, mais je crois par ce travail de patience avoir rendu un service réel aux professeurs et aux élèves. Ces problèmes représentent en quelque sorte le résumé des travaux mathématiques d'un demi-siècle. Presque tous intéressants, quelques-uns sont dus à des Géomètres illustres, et méritent d'attirer l'attention, non seulement en ce qui concerne l'enseignement, mais aussi en ce qui concerne la science pure. Et cependant, épars dans des collections dont quelques-unes sont rares aujourd'hui, ils étaient devenus presque introuvables, surtout pour les élèves.

Autant que possible, j'ai cité les noms des auteurs des questions, et aussi le Recueil auquel chacune d'elles est empruntée. En outre, j'ai indiqué les solutions publiées par un système de renvois abréviatifs, afin de permettre, en cherchant dans les collections des bibliothèques, de retrouver une solution qu'on désirerait étudier. On verra ci-dessous l'explication de ces renvois.

Lorsque plusieurs solutions ont été publiées et qu'elles sont également bonnes, le nom indiqué est généralement celui de l'auteur de la première solution.

Quand une question a été généralisée, l'énoncé qu'on trouvera est habituellement celui qui résulte de la généralisation.

Quelquefois une note indiquera simplement que la question a été généralisée.

Malgré tout le soin et l'attention que j'ai mis à contrôler et à vérifier la correspondance entre les énoncés et les solutions, quelques erreurs ou quelques doubles emplois ont pu néanmoins subsister. Je m'en excuse d'avance et j'accueillerai avec reconnaissance les rectifications qui me seraient adressées à ce sujet.

Les questions dépourvues d'indications de solutions n'ont pas été résolues, ou du moins je n'en ai pas trouvé de solutions dans les différents Recueils où j'ai fait d'attentives recherches. Parmi ces Exercices, il en est un certain nombre dont la difficulté semble expliquer l'absence de solution; nous en avons fait précéder l'énoncé d'un astérisque. Nous avons également marqué d'un astérisque les questions non résolues qui, sans être très difficiles, paraissent présenter un intérêt particulier et méritent de nouvelles recherches.

Je tiens à remercier publiquement ici mon excellent ami, le Commandant Brocard, pour ses conseils précieux et son concours personnel, en vue de la publication de ce Recueil.

C.-A. Laisant.

Nota. — Pour toutes les questions non résolues, je recevrai les solutions que les lecteurs croiraient devoir m'adresser (à la librairie Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris), et je me ferai un plaisir de les transmettre aux divers journaux pouvant les insérer.

Les solutions des questions provenant du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* prendront naturellement place dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* ou le *Journal de Mathématiques spéciales*, suivant leur nature. Celles provenant de la *Nouvelle Correspondance mathématique* seront accueillies par la rédaction de *Mathesis*.

ABRÉVIATIONS ET RENVOIS.

N. A. — *Nouvelles Annales de Mathématiques* (depuis 1842, fondation).

N. C. — *Nouvelle Correspondance mathématique* de M. Catalan. (Collection complète en 6 volumes; 1875-80.)

J. M. — *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* de Bourget. (Collection complète en 5 volumes: 1877-1881.)

J. E. — *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps (depuis 1882, continuation du J. M.).

J. S. — *Journal de Mathématiques spéciales* de M. de Longchamps (depuis 1882, continuation du J. M.).

M. — *Mathesis* (depuis 1881, fondation) (1).

L'indication qui suit immédiatement un énoncé comprend le nom de l'auteur en PETITES CAPITALES, le titre du Recueil auquel l'énoncé est emprunté, et le numéro de cette question dans le Recueil. Par exemple,

(CHASLES, N. A., 83)

signifie que la question a été posée par Chasles et qu'elle occupe le n° 83 dans les *Nouvelles Annales*. S'il n'y a pas de nom d'auteur, c'est que celui-ci est resté inconnu, ou que les rédacteurs en ont pris le patronage. L'indication des solutions se trouve au-dessous de l'énoncé et vers la gauche; elle comprend le nom de l'auteur (ou des auteurs) d'une au moins des solutions, en *italiques*, le millésime (réduit aux deux derniers chiffres) de l'année de la publication du

(1) En fait, le journal *Mathesis*, dirigé par MM. Mansion et Neuberg, a recueilli et continué la tradition scientifique de la N. C.

tome, en *caractères gras*, et le numéro de la page où l'on peut retrouver la solution. Par exemple, l'indication

(*Jamet*, **78**, 296),

au-dessous d'une question extraite de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, signifie que la solution en a été publiée par M. Jamet dans l'année 1878 du même Recueil, à la page 296.

S'il arrive exceptionnellement qu'une question extraite d'un Recueil ait été résolue dans un autre, l'indication le fera également connaître. Ainsi

(*Brocard*, M., **82**, 248)

au-dessous d'une question extraite de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, signifie que la solution en a été publiée par M. Brocard dans *Mathesis*, année 1882, page 248.

Si plusieurs solutions ont été publiées, les renvois le feront connaître; mais on n'indiquera généralement que les noms d'un ou de deux auteurs des solutions.

OBSERVATION SPÉCIALE AU PRÉSENT VOLUME.

On trouvera ci-après les questions d'*Arithmétique,* d'*Algèbre élémentaire* et de *Trigonométrie,* extraites des divers Recueils périodiques, comme l'indique le titre du Volume.

Le nombre des exercices d'Arithmétique est insignifiant. Cela tient à ce que la plupart des exercices concernant les nombres entiers et d'autres théories arithmétiques semblent plutôt destinés par leur nature même à prendre place dans la *Théorie des nombres* et se trouveront conséquemment dans un autre Volume. Ce sont, en effet, des questions qui dépassent, en général, les bornes de l'enseignement moyen des Mathématiques élémentaires.

Pour l'Algèbre, nous avons fait figurer ici tous les problèmes qui se rapportent, soit au calcul algébrique élémentaire, soit aux équations du premier et du deuxième degré, soit aux progressions et aux logarithmes. Quelques questions, en petit nombre, exigent des connaissances sommaires sur le calcul des déterminants, introduites aujourd'hui dans beaucoup de cours de Mathématiques élémentaires.

Pour la Trigonométrie, nous ne pouvions songer à scinder en deux la collection, assez restreinte, des exercices que nous offrent les Recueils. On trouvera donc, principalement sur la Trigonométrie sphérique, des questions qui appartiennent plutôt à l'enseignement des Mathématiques spéciales, et auxquelles les professeurs et élèves d'Élémentaires ne s'arrêteront pas. Par contre, nous nous somme efforcé d'éliminer tous les exercices un peu compliqués sur les fonctions circu-

laires, qui exigent la connaissance des séries ou de certaines notions de Calcul infinitésimal. Ceux-là trouveront leur place naturelle dans le Volume consacré aux candidats à la Licence.

La classification s'explique d'elle-même; pour s'en rendre compte, il suffira de parcourir la Table des matières et de feuilleter quelques instants le Volume.

Nous attirerons surtout l'attention sur les exercices de calcul, sur les équations et systèmes d'équations. Par leur extrême diversité, ces problèmes sont destinés à rendre de grands services aux élèves. S'ils y consacrent un peu de leur temps, ils arriveront bientôt à se rendre maîtres de toutes les difficultés que peut présenter l'Algèbre élémentaire, difficultés parfois assez grandes, pour les commençants surtout.

NOTA. — Les énoncés que contient ce Volume ont été relevés jusqu'au mois d'*Octobre* 1892 *inclusivement*, dans les divers Recueils périodiques.

ARITHMÉTIQUE.
ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.
TRIGONOMÉTRIE.

ARITHMÉTIQUE.

Division et diviseurs.

1. Connaissant le dividende, le diviseur et le résidu d'une division, comment trouve-t-on les chiffres du quotient de droite à gauche? (N. A., **139**.)

(*De Virieu*, **72**, 129.)

2. Pour trouver le plus grand commun diviseur entre A et a, on peut s'y prendre de la manière suivante. On multiplie A par la suite des nombres 1, 2, 3, ..., a, et l'on cherche combien on obtient ainsi de nombres divisibles par a. Leur nombre est le plus grand commun diviseur cherché. (J. M., **95**.)

(*Mirjolet*, **78**, 214.)

3. Les numérateurs de plusieurs fractions égales sont des

équimultiples, respectivement, des quotients trouvés en divisant les dénominateurs par leur plus grand commun diviseur.

(REYNAUD, J. M., 58.)

(*Vautré*, **78**, 58.)

4. Si A et A′ sont deux puissances différentes d'un nombre premier a, B et B′ deux puissances différentes d'un nombre premier b, et si les nombres AB, AB′, A′B, A′B′ ont respectivement m, n, p, q diviseurs, le nombre des diviseurs du nombre bAB′BA est $(m+n+p+q)$. (J. M., 103.)

(*Menand*, **78**, 220.)

5. Une longueur étant partagée en m parties égales par des points *noirs*, et en n parties égales par des points *rouges*, déterminer la plus petite distance entre un point noir et un point rouge. (VINCENT, N. A., 173.)

(*Vachette*, **48**, 13.)

Divisibilité.

6. Si trois nombres entiers ont une somme égale à zéro, la somme de leurs cubes est égale à leur triple produit, et la somme de leurs cinquièmes puissances est divisible par cinq fois leur produit. (DE LONGCHAMPS, J. E., 18.)

(*H. Bourget*, **82**, 88.)

7. n étant un nombre entier, démontrer que

$(2n+1)^5 - 2n - 1$	est divisible par	240
$3^{2n+2} - 8n - 9$	»	64
$3^{2n+3} + 40n - 27$	»	64
$3^{2n+1} + 2^{n+2}$	»	7
$3^{2n+2} + 2^{6n-1}$	»	11
$3^{4n+4} - 4^{3n+3}$	»	17
$3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$	»	17

(WOLSTENHOLME, J. E., 27.)

(*Puig*, **82**, 189.)

8. Démontrer les propositions suivantes :

1° La somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par trois fois le terme du milieu, et toujours par 9.

2° Le nombre $\frac{n^3+(n+2)^3}{4}$ est toujours un nombre entier; il est de plus toujours un nombre composé, excepté pour $n=1$.

3° Les nombres de la forme arithmétique n^4+n^2+1 sont toujours composés, excepté pour $n=1$.

(De Longchamps, J. E., **65**.)

(*De Kerdrel*, **83**, 113.)

9. Étant donnée la série illimitée

7, 13, 25, 43, 67, 97, 133, 175, ...

dont le terme général, celui qui en a n avant lui, est

$$x_n = 3(n^2+n)+7,$$

démontrer les trois propositions suivantes :

1° Sur cinq termes consécutifs, pris à volonté dans la série, un terme est divisible par 5;

2° Sur sept termes consécutifs, deux sont divisibles par 7;

3° Sur treize termes consécutifs, deux sont divisibles par 13;

4° Aucun terme de la série n'est égal à un cube;

5° Une infinité de termes, tels que $x_2=25$, $x_{37}=4225$, ..., sont des carrés divisibles par 25.

Nota. — La deuxième et la troisième propositions sont comprises, comme cas particuliers, dans la suivante. Si N est un nombre premier, de la forme $6m+1$, sur n termes consécutifs de la série, deux sont divisibles par N. On peut affirmer aussi que, à l'exception de 5, aucun nombre premier de la forme $6m-1$, ne peut diviser un terme de la série; mais ces propositions, que nous énonçons ici incidemment, et parce que l'occasion s'en présente, tiennent à des principes moins élémentaires que ceux qui servent à justifier les énoncés ci-dessus.

(Realis, J. E., **88**.)

(*Bourgarel*, **84**, 111.)

10. Si m, n, p, r sont des nombres entiers quelconques, le

nombre

$$N = (13p - 4^n r)\, 10^{6m+n} + r$$

est divisible par 13. (CHRISTIE, M., 683.)

(90, 151.)

11. Le nombre $(2a)\,(2b)\,(2c)\,abc$ est divisible par 23 et 29.
(HAIN, N. C., 13.)

(*Medulfus,* 75, 104, 187.)

12. Déterminer x et y de manière que le nombre $1234xy$ soit divisible par 8 et par 9. (HAIN, N. C., 14.)

(*Medulfus,* 75, 104.)

13. Le nombre p étant premier avec 10, montrer qu'on peut toujours trouver un multiple de p terminé par des chiffres pris arbitrairement. (J. M., 96.)

(*Malesset,* 78, 215.)

14. Prouver que $(a - b)\sqrt{ab}$ est divisible par 24 si ab est un carré parfait et que a et b soient de même parité.
(BERNHEIM, J. M., 183.)

(*Deslais,* 80, 357.)

Fractions périodiques.

15. 1020 étant le dénominateur d'une fraction irréductible, pourquoi le nombre des chiffres de la période engendrée par cette fraction sera-t-il l'un des nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32?
(LIONNET, N. A., 876.)

(*Morel,* 71, 41, 92.)

16. Lorsque la réduction d'une fraction $\frac{a}{b}$ en décimales conduit à une période de n chiffres, toute fraction irréductible dont le dénominateur égale un multiple de b donne lieu à une période dont le nombre des chiffres égale un multiple de n.
(LIONNET, N. A., 877.)

(*Morel,* 71, 39, 93.)

17. Lorsque la conversion de plusieurs fractions irréductibles $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$ en décimales conduit à des périodes dont n, n', n'', ... sont les nombres de chiffres, toute fraction irréductible dont le dénominateur est égal au plus petit commun multiple des dénominateurs b, b', b'', ... donne lieu à une période d'un nombre de chiffres égal au plus petit commun multiple des nombres n, n', n'', ... (LIONNET, N. A., **878**.)

(*Pellet,* **71**, 93.)

18. Lorsque la conversion en décimales d'une fraction irréductible dont le dénominateur est un nombre premier p conduit à une période de n chiffres, et que p^α est la plus grande puissance de p qui divise $10^n - 1$, toute fraction irréductible ayant pour dénominateur $p^{\alpha+\beta}$ conduit à une période de np^β chiffres. (LIONNET, N. A., **879**.)

(*Pellet,* **71**, 94.)

Propriétés de nombres entiers.

19. Si on multiplie 142857 (multiplicande) par 326451 (multiplicateur), tous les chiffres d'une même colonne verticale dans les produits partiels sont égaux; trouver d'autres nombres jouissant de la même propriété. (PROUHET, N. A., **87**.)

(*Denis,* **51**, 147.)

20. Soit N un nombre impair, égal à la somme de deux carrés, et composé de n facteurs premiers, égaux ou inégaux. Le carré de N est :

1° La somme de deux carrés (propriété évidente et connue);
2° La somme de trois carrés;
3° La somme de quatre carrés;
. . . . ;
4° La somme de $(n+1)$ carrés. (CATALAN, J. E., **160**.)

21. Si N est un multiple de 3, on prend, dans la suite décrois-

sante, N — 1, N — 2, ... 2.1, tous les nombres qui ne sont pas multiples de 3, les deux premiers avec le signe +, les deux suivants avec le signe —, les deux suivants avec le signe +, etc., et l'on fait la somme algébrique. Démontrer que le résultat est égal à N. (D'OCAGNE, J. E., 249.)

(*Chapron*, **88**, 232.)

22. Le produit de quatre nombres entiers consécutifs ne peut pas être un carré. (J. M., 79.)

(*Lamy*, **78**, 124.)

23. Si a et b sont deux nombres premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair, la différence de leurs carrés ne peut être un carré parfait que si $(a+b)$ et $(a-b)$ sont eux-mêmes des carrés parfaits. (PERRIN, J. M., 92.)

(*Demortain*, **78**, 185.)

Questions diverses.

24. t_n travailleurs, dont la force individuelle est représentée par f_n, exécutent m_n mètres d'ouvrage en i_n jours dans un terrain dont la dureté est représentée par d_n; l'indice n prend les n valeurs 1, 2, 3, ..., n; combien de jours mettront tous ces travailleurs, au nombre de $t_1 + t_2 + \ldots + t_n$, travaillant ensemble, à exécuter M mètres d'ouvrage dans un terrain de dureté D? (N. A., 183.)

(*Jullien*, **51**, 145.)

25. Un débiteur doit acquitter sans intérêt :

Une dette	C_1	au bout de	n_1	années,
»	C_2	»	n_2	»
»	C_3	»	n_3	»
...	...	...	...	...
»	C_p	»	n_p	»

Il veut payer les sommes

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_p$$

à la fois; démontrer qu'en appelant t le nombre d'années au bout desquelles il doit payer cette somme, on a

$$t = \frac{100}{V}\left(\frac{n_1 C_1}{100 + n_1 i} + \frac{n_2 C_2}{100 + n_2 i} + \frac{n_3 C_3}{100 + n_3 i} + \ldots + \frac{n_p C_p}{100 + n_p i}\right),$$

$i =$ intérêt annuel pour 100;

$$V = \left(\frac{100 C_1}{100 + n_1 i} + \frac{100 C_2}{100 + n_2 i} + \ldots + \frac{100 C_n}{100 + n_p i}\right). \quad \text{(N. A., 523.)}$$

(*Cuenoud*, **61**, 336.)

26.

BACCHUS ET SILÈNE.

Bacchus, ayant vu Silène
Auprès de sa cuve endormi,
Se mit à boire sans gêne
Aux dépens de son ami.
Ce jeu dura pendant le triple du cinquième
Du temps qu'à boire seul Silène eût employé.
Il s'éveille bientôt, et son chagrin extrême
Dans le reste du vin est aussitôt noyé.
S'il eût bu près de Bacchus même,
Ils auraient, suivant le problème,
Achevé six heures plus tôt;
Alors Bacchus eût eu, pour son écot,
Deux tiers de ce qu'à l'autre il laisse.
Ce qui maintenant m'intéresse
Est de savoir exactement
Le temps qu'à chaque drôle il faut séparément
Pour vider la cuve entière
Sans le secours de son digne confrère [1].

(N. C., 6.)

(**75**, 186.)

---

[1] Ce curieux énoncé m'a été communiqué, il y a bien des années, par le savant professeur et philologue Vincent. On en trouve une version, différente de celle-ci, dans la troisième édition des *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet, que vient de publier M. Labosne. Vers 1848,

27. Quel est le plus petit nombre entier, premier avec 1.2.3...n? (CATALAN, J. E., **387**.)

28. On possède un poids de 1gr, un poids de 3gr, un poids de 9gr, un poids de 27gr, etc. Montrer que l'on peut peser, à l'aide d'une balance et de ces poids, un objet dont le poids est un nombre quelconque de grammes. (M., **122**.)

(*De Rocquigny*, **82**, 183.)

29. Parmi les nombres de deux chiffres, dans le système décimal, il en est qui, renversés, représentent le même nombre dans un autre système. Dans quelle dizaine ce cas est-il le plus fréquent? (SALMON, N. C., **176**.)

(*Van Aubel*, **77**, 55.)

30. Trouver deux nombres, connaissant leur somme et leur plus petit commun multiple. (BORDAGE, J. M., **48**; J. E., **196**.)

(*Demortain*, J. M., **77**, 351; *Russo*, J. E., **87**, 119.)

31. Par quel nombre faut-il multiplier un nombre donné pour que la somme des valeurs absolues de ses chiffres significatifs reste la même? (ARNOYE, J. M., **198**.)

(*H. Bourget*, J. E., **82**, 62) ([1]).

32. Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

(BROCARD, N. A., **971**, J. M., **199**.)

(*Morel, Kruschwitz*, N. A., **71**, 44, 187; *Dupuy*, J. M., **81**, 69.)

---

un élève du lycée Charlemagne, à Paris, fit la jolie réponse suivante :

Dans cette occasion, Silène eut tout l'honneur.
En quinze heures Bacchus acheva la besogne;
Il n'en fallut que dix au digne précepteur :
J'en conclus qu'il était de moitié plus ivrogne.

(*Note de M. Catalan.*)

([1]) La solution indiquée n'est pas exempte d'erreur, et nous engageons le lecteur à reprendre cette question.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

CALCUL ALGÉBRIQUE.

Opérations ou transformations.

1. Décomposer $\frac{1}{6}(3n^4 - 4n^3 + n)$ en une somme algébrique de $n(n-1)$ carrés [1]. (DE ROCQUIGNY, M., **281**.)

(*Jamet*, **89**, 119.)

2. Lorsqu'on élève au carré le produit de deux nombres entiers consécutifs augmenté de 1, l'on obtient une somme de trois carrés. En général, le carré du trinôme $a^2 + ab + b^2$ est égal à la somme de trois carrés. (J. M., **100**.)

(*Sanson*, **78**, 218.)

3. On suppose que B n'est pas un carré parfait et l'on propose de mettre la quantité

$$z = \sqrt[4]{A + \sqrt{B}}$$

sous la forme d'une somme de deux radicaux carrés :

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Donner les conditions nécessaires pour que la transformation soit avantageuse, ce qui peut avoir lieu dans deux cas différents, savoir :

1° Lorsque les quantités x et y sont de la forme $\alpha + \sqrt{\beta}$;

---

[1] Ou encore en une somme algébrique de $2(n-1)$ carrés.



2° Lorsque ces quantités sont des formes rationnelles.

On appliquera la formule d'identité trouvée aux deux exemples numériques

$$z = \sqrt[4]{6+\sqrt{20}}, \qquad z = \sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$$

et l'on vérifiera les résultats numériques ainsi obtenus.

(J. M., 380.)

(J. E., **82**, 63.)

4. On considère l'expression

$$a = \sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}},$$

et l'on propose de la transformer en un produit de deux facteurs de la forme $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Démontrer que la transformation n'est possible que si $a^2d = bc$, et qu'elle n'est avantageuse que si les nombres a^2-b, a^2-c sont carrés parfaits.

Exemple :

$$\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+3)}{6}.$$

(De Longchamps, J. E., 53.)

(**83**, 91.)

5. Soient, pour abréger,

$$N = (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc),$$

$$\Delta = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d).$$

Quelles sont les racines carrées des polynômes

$$4N - a^2\Delta, \quad 4N - b^2\Delta, \quad 4N - c^2\Delta, \quad 4N - d^2\Delta ?$$

(Catalan, J. E., 286.)

(*Boutin*, **89**, 143.)

6. On donne les deux relations

$$\begin{vmatrix} a & a' & x \\ b & b' & y \\ c & c' & z \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & a' & x' \\ b & b' & y' \\ c & c' & z' \end{vmatrix} = 0;$$



on propose d'en déduire les suivantes

$$\begin{vmatrix} a & x & x' \\ b & y & y' \\ c & z & z' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a' & x & x' \\ b' & y & y' \\ c' & z & z' \end{vmatrix} = 0.$$

(Hermite, J. E., **301**.)

(*Boutin*, **90**, 117.)

7. Trouver la valeur, pour $x = 1$, de la fonction

$$\frac{(x^m - 1)(x^n - 1) - mn(x-1)^2}{(x-1)^3}.$$ (Dellac, J. E., **361**.)

(*Sollertinsky*, **91**, 22.)

8. Tout nombre de la forme $(2p+1)^2(2q+1)$ peut, de deux façons différentes, être considéré comme la différence de deux carrés. (Russo, J. E., **368**.)

(*Youssoufian*, **91**, 142.)

9. 1° Exercice numérique. — Simplifier la somme des fractions

$$(2n+1)\frac{2.3.4\ldots n}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}}, \quad (2n-3)\frac{4.5\ldots n}{5.7\ldots\overline{2n-1}},$$

$$(2n-7)\frac{6.7\ldots n}{7.9\ldots\overline{2n-3}}, \quad \ldots, \quad \text{pour } n = 7, 8, 9, 10, \ldots$$ [1].

2° Théorème. — La somme des fractions considérées dans la question précédente est $\frac{n}{n+1}$ ou $\frac{n-1}{n+2}$, suivant que n est pair ou impair.

3° Théorème. — Soit n un nombre entier, soit k un nombre

---

[1] Le dernier produit, en numérateur, est n ou $(n-1)n$, selon que n est pair ou impair.

entier inférieur à n. On a

$$\frac{1}{n-k}-\frac{k}{(n-k)(n-k+1)}+\frac{k(k-1)}{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}-\dots \pm\frac{k(k-1)\dots 1}{(n-k)(n-k+1)\dots n}=\frac{1}{n}.$$

(CATALAN, J. E., 381.)

(*Sollertinsky*, **91**, 262.)

10. Démontrer que

$$\frac{1}{2}\Sigma a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2$$

est un carré parfait. (DE LONGCHAMPS, J. E., 401.)

(*Sollertinsky*, **92**, 45.)

11. Si, au double d'un nombre triangulaire ([1]), on ajoute un carré, on obtient la somme de deux nombres triangulaires.

(CATALAN, J. E., 414.)

(*Sollertinsky*, **92**, 71.)

12. Simplifier le polynôme

$$\begin{aligned}&(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)\\&\quad+x\,(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)\\&\quad+x^2(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^n)\\&\quad+\dots\dots\dots\dots\\&\quad+x^n\end{aligned}$$

(CATALAN, J. E., 438.)

Divisibilité.

13. Trouver les conditions de divisibilité de

$$x^p+mx^{p-q}y^q+mx^{p-2q}y^{2q}+y^p$$

par $(x+y)^2$. (GELIN, M., 176.)

(*Polet*, **83**, 69.)

([1]) Les nombres triangulaires sont : 1, 3, 6, 10, ... $\frac{n(n+1)}{2}$, ...

14. Si x, y, z sont des nombres entiers, le nombre

$$N = xyz(x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz) + x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3$$

est décomposable en deux facteurs entiers, et, par suite, ne peut être premier. (CATALAN, M., 700.)

(*Kluyver*, **91**, 49.)

15. Démontrer que le polynôme

$$A = n(n+1)(n+2)x^n - 6.n.1.x^{n-1} - 6.(n-1).2x^{n-2} \\ - 6.(n-2).3.x^{n-3} \ldots - 6.2(n-1).x - 6n$$

est exactement divisible par $(x-1)$, et donner le quotient.

(DE LONGCHAMPS, J. E., 1.)

(*H. Bourget*, **82**, 212.)

16. Démontrer que le polynôme

$$A = nx^{n+1} - (1+np)x^n \\ + (p-1)x^{n-1} + (p-1)x^{n-2} + \ldots + (p-1)x + p$$

est exactement divisible par

$$x^2 - (p+1)x + p.$$

(DE LONGCHAMPS, J. E., 2.)

(*Germain*, **82**, 112.)

17. a, b, c étant trois entiers satisfaisant à la condition

$$ab + bc + ca = 1,$$

prouver que

$$\Sigma(ab-1)(a+1)(b+1)(c-1) = M(a+b+c+1).$$

(CATALAN, J. E., 224.)

(*Quintard*, **88**, 166.)

18. En prenant comme d'habitude

$$C_{n,p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p},$$

démontrer que

$$2C_{n,p} + (4n+q)(C_{n,p-1} + (2n+5)C_{n,p-2} = \mathfrak{M}(2p+1).$$

(Catalan, J. E. 264.)

(*Boutin*, **89**, 22.)

19. On a

$$(a+c)(a+2c)\ldots(a+nc)$$
$$+(-1)^{n-1}(b+c)(b+2c)\ldots(b+nc) = \mathfrak{M}[a+b+(n+1)c].$$

(Catalan, J. E., 280.)

(*Lavieuville*, **89**, 93.)

Identités. — Inégalités.

20. Vérifier l'égalité

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{\frac{2+\sqrt{5}}{4}}} - \sqrt{-1+\sqrt[4]{\frac{2+\sqrt{5}}{4}}}} = \sqrt[8]{1+2\sqrt{-2+\sqrt{5}}}.$$

(Gelin, M., 309.)

(*Stuyvaerts*, **84**, 198.)

21. Si $x=a$, $y=b$, $z=c$ forment un système de solutions de l'équation

$$x^3+y^3+z^3=(y+z)(x+z)(x+y)$$

un second système de solutions est

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}, \quad \frac{1}{a^2+c^2-b^2}, \quad \frac{1}{a^2+b^2-c^2}.$$ (M., 426.)

(*Rochetti*, **87**, 197.)

22. Si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, on a également

$$S\frac{a^2-bc}{b+c}\cdot S\frac{b+c}{a^2-bc} = \frac{3}{abc}Sa^3.$$ (Leudesdorf, M., 709.)

(Melle *de Haas*, **91**, 150.)

23. Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle et x, y, z trois nombres, tels que la somme $x+y+z$ soit positive. Démontrer que le produit xyz est négatif, si

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}=0.$$ (Greenstreet, M., 738.)

(*François*, **91**, 262.)

24. Démontrer que l'expression

$$\tfrac{1}{2}\Sigma a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2$$

est un carré parfait [1]. (De Longchamps, M., 755.)

(*Gelin*, **92**, 122.)

25. 1° La somme de deux nombres consécutifs de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$, n étant entier, est toujours un carré parfait.

2° Le double d'un nombre de la forme $2n(n-1)$, augmenté de 1, donne le carré d'un nombre impair.

3° La somme de deux nombres de la forme $2n(n-1)$ donne le carré d'un nombre pair.

4° Le produit de deux nombres de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$ et $2n(n-1)$, augmenté du carré de n, donne la quatrième puissance de n. (Brocot, J. M., 83.)

(*Chellier*, **78**, 126.)

26. La somme des n premiers nombres de la forme

$$1+3n(n-1)$$

est égale au cube de n. (Brocot, J. M., 84.)

(*Vautré*, **78**, 185.)

---

[1] Énoncé identique à celui de la question n° 10 ci-dessus. Le maintien de ce double emploi dans deux subdivisions différentes, fait avec intention, ne semble pas avoir ici d'inconvénients.



27. Tout nombre de la forme

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}[1+2n(n-1)]$$

est une quatrième puissance. (BROCOT, J. M., **85**.)

(*Westphalen*, **78**, 127.)

28. Démontrer l'identité

$$x^{4n+2} + y^{4n+2} = (x^{2n+1} - x^{2n-1}y^n + 2x^{2n-2}y^4 - \ldots \pm 2xy^{2n})^2$$
$$+ (y^{2n+1} - 2y^{2n-1}x^2 + 2y^{2n-3}x^4 - \ldots \pm 2yx^{2n})^2.$$

(CATALAN, J. E., **152**.)

(*Vigarié*, **85**, 278.)

29. Démontrer que si l'on a

$$a + b + c = 0,$$

les deux quantités

$$a^3 b + b^3 c + c^3 a,$$
$$a^3 c + b^3 a + c^3 b$$

sont égales, et que chacune d'elles, changée de signe, représente un carré parfait. (DE LONGCHAMPS, J. E., **217**.)

(*Beyens*, **88**, 44.)

***30.** Avec les $2n$ éléments $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, $\ldots$, $\pm l$, on forme 2^n polynômes renfermant chacun *une* des lettres a, b, c, $\ldots$, l, et l'on élève ces polynômes à la puissance p, en mettant devant cette puissance le signe + ou le signe —, suivant que le nombre des éléments négatifs du polynôme est pair ou impair. Soit A_n^p la somme algébrique de tous ces termes. Démontrer que :

1° La fonction A_n^p est nulle pour toute valeur de p inférieure à n, et aussi pour toutes les valeurs de p qui surpassent n d'un nombre impair;

2°

$$A_n^n = 2^n \times 1.2.3\ldots n \times abc \ldots kl;$$

3°

$$A_n^{n+2} = 2^n \times 4.5.6\ldots(n+2) \times abc \ldots kl \times (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + l^2);$$

4°

$$A_2^{2q} = \frac{4.2q}{1} \times ba^{2q-1} + 4b^3 \frac{2q(2q-1)(2q-2)}{1.2.3} \times a^{2q-3} + \ldots;$$

5°

$$n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n - \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}(n-2p)^n + \ldots$$
$$+ (-1)^n(-n)^n = 2^n \times 1.2.3\ldots n.$$

(Dellac, J. E., 337.)

31. Si l'on a

$$f + g + h = 1,$$

l'égalité

$$abc\left[\frac{f}{a^2} + \frac{g}{b^2} + \frac{h}{c^2} - \left(\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c}\right)^2\right]\sum\frac{a(b-c)^2}{f}$$
$$= \left[(af + bg + ch)\left(\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c}\right) - 1\right]\sum\frac{a^2(b-c)^2}{f}$$

est une identité. (Catalan, J. E., 342.)

(*Boutin*, **90**, 239, 261.)

32. On a

$$1 \times \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2n-3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \times 1$$
$$= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

(Catalan, J. E., 415.)

(*Sollertinsky*, **92**, 71.)

33. Si $f + g + h = 1$, les équations

$$xyz\left[\frac{f}{x^2} + \frac{g}{y^2} + \frac{h}{z^2} - \left(\frac{f}{x} + \frac{g}{y} + \frac{h}{z}\right)^2\right]\sum\frac{x(y-z)^2}{f} = m,$$
$$\left[(fx + gy + hz)\left(\frac{f}{x} + \frac{g}{y} + \frac{h}{z}\right) - 1\right]\sum\frac{x^2(y-z)^2}{f} = m,$$

ont des premiers membres identiquement égaux [1].

(Catalan, J. E., 443.)

---

[1] A la forme près, cette question est identique avec celle qui fait l'objet de l'énoncé n° 31 ci-dessus.

*34. L'égalité

$$-a'^4-b'^4-c'^4+2b'^2c'^2+2c'^2a'^2+2a'^2b'^2$$
$$=(-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2)$$
$$\times\left[1-\frac{az(b-y)+bx(c-z)+cy(a-x)}{abc}\right]$$

devient identique si l'on fait simultanément

$$a'^2=(b-y)^2+z^2+\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}(b-y)z,$$

$$b'^2=(c-z)^2+x^2-\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}(c-z)x,$$

$$c'^2=(a-x)^2+y^2-\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}(a-x)y.$$

Exemple. — Soient

$$a=7,\qquad b=6,\qquad c=5,\qquad x=4,\qquad y=5,\qquad z=3;$$

d'où résultent

$$a'^2=\frac{44}{5},\qquad b'^2=\frac{396}{35},\qquad c'^2=\frac{88}{7}.$$

On doit trouver (après quelques réductions préliminaires)

$$\frac{44\cdot 9504}{1225}=3456\left(\frac{11}{35}\right)^2;$$

ce qui est exact. (Catalan, J. E., 444.)

*35. Si x, y, z sont trois nombres positifs, dont la somme est égale à l'unité, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z)>8xyz. \quad \text{(Wolstenholme, N. A., 1554.)}$$

36. Si a, b, c désignent les côtés d'un triangle rectiligne, on a

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\gtreqless 0. \quad \text{(Catalan, M., 686.)}$$

(*Anderson*, 90, 213.)

ÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ.

—

Propriétés d'équations.

37. Démontrer que, si l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

a ses racines réelles, l'équation

$$x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$$

a aussi ses racines réelles, quel que soit a.

(DE LONGCHAMPS, J. E., **4**.)

(*Sarrazin*, **82**, 113.)

38. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb') = 0$$

aient une racine commune est que l'une ou l'autre de ces équations ait ses racines égales. (LAUVERNAY, J. E., **32**.)

(*Mosnat*, **83**, 41 ; **90**, 281 ; **91**, 16.)

39. Si l'équation $x^2 - px + q = 0$ admet deux racines entières et positives,

1° L'expression

$$\frac{q(q + p + 1)(4q + 2p + 1)}{36}$$

représente un nombre entier décomposable en une somme de q carrés ;

2° L'expression

$$\frac{q^2(q + p + 1)^2}{16}$$

représente un nombre entier décomposable en une somme de q cubes;

3° Le nombre

$$q^2(4q+2p+1)$$

est décomposable en une somme algébrique de $4q$ carrés.

(Laisant, J. E., 128.)

(*Boutin*, **87**, 111.)

40. L'équation

$$3x^2(a+b+c)+4x(ab+bc+ca)+4abc=0$$

a ses racines réelles, quels que soient a, b, c. Montrer qu'elles sont rationnelles quand on suppose :

1° $b=c$,

2° $bc=a(b+c-a)$. (Lauvernay, J. E., 370.)

(*Sollerstinsky*, **91**, 164.)

Maximums et minimums. — Questions analytiques.

41. Faire voir que l'étude des variations de la fonction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ peut toujours être ramenée à l'étude des variations de la fonction $\frac{Ax^2+Bx+C}{x^2+px+q}$, dans laquelle les racines α, β de $x^2+px+q=0$ sont *réelles* et *inégales;* que si $R(x)$ est le reste de la division de Ax^2+Bx+C par x^2+px+q, il y aura un maximum et un minimum si $\frac{R(\alpha)}{R(\beta)}<0$; il n'y aura qu'un maximum (pour la fonction transformée), si $R(x)$ est constant.

Trouver, en fonction de α, β, $R(\alpha)$, $R(\beta)$, les valeurs de x qui font passer la fonction proposée par un maximum ou par un minimum.

Dans le cas où α et β se présenteraient sous la forme $\frac{a\pm\sqrt{b}}{c}$, peut-on simplifier les calculs? (Hénet, N. A., 1361.)

42. Étudier la variation de la fonction

$$\frac{x^2 - 2ax + 3b}{x^2 + ax - 2b},$$

a et b ayant des valeurs réelles quelconques. (M., **672.**)

(*Sohie,* **90**, 149.)

43. Trouver le minimum de $\frac{x^m}{y^n}$ pour $m > n$, sachant que $x - y = a$. (J. M., **3.**)

(*Bailly,* **77**, 89.)

44. $a^x b^y c^z$ est minimum, et $(x+1)(y+1)(z+1)$ est constant. Trouver une relation entre x, y et z. (J. M., **15.**)

(*Jullidière,* **77**, 349.)

45. On considère l'égalité

$$y^2 = \frac{4a^2x^2 + b^2(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2},$$

et l'on propose d'étudier les variations de y quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$; en supposant $a > b$, on propose de démontrer :

1° Que a est le maximum de y,

2° Que b est le minimum de y,

3° Que si l'on donne à y une valeur comprise entre a et b, l'équation bicarrée qui donne x a ses quatre racines réelles, et que si l'on désigne par x_1 l'une des racines, les trois autres sont données par les égalités

$$x_1 + x_2 = 0, \qquad x_1x_3 + 1 = 0, \qquad x_1x_4 - 1 = 0.$$

(De Longchamps, J. M., **185.**)

(*Sigevarth,* **80**, 394.)

46. Trouver le maximum du produit $x^m . y^n$, sachant que les variables positives x et y sont liées par la relation

$$x^p y^q + x^{p'} y^{q'} = k. \qquad \text{(J. E., 43.)}$$

(*Puig,* **84**, 207; **85**, 45.)

47. Étant donnée la fraction

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'},$$

on forme l'équation $Ax^2+2Bx+C=0$, donnant les valeurs de x pour lesquelles la fraction est maximum ou minimum. Le polynôme B^2-AC est un produit de fonctions rationnelles de a, b, c, a', b', c'. Trouver les facteurs de ce produit.

(Weill, J. E., **147.**)

(*Chapron*, **87**, 213.)

Maximums et minimums. — Questions géométriques.

48. La base AB d'un triangle rectiligne ABC est donnée de grandeur et de position; la somme des deux autres côtés AC, BC du triangle est égale à une droite donnée; on suppose que ce triangle tourne autour d'un axe rectiligne tracé sur son plan; déterminer le sommet C du triangle de manière que la somme des surfaces décrites par les deux côtés AC, BC, adjacents à la base, soit un *maximum* ou bien un *minimum*. (N. A., **10.**)

(*De Beausacq*, **42**, 236.)

49. Étant donné le volume d'un secteur sphérique, quelle est la valeur extrême de l'aire *totale* du secteur? Discussion du problème. (N. A., **352.**)

(*De Rochas*, **57**, 96.)

50. Un triangle ABC, rectangle en A, tourne autour d'un axe mené par B parallèlement à AC. Calculer ses trois côtés sous la double condition que son périmètre ait une valeur donnée et que le volume engendré par lui en un tour complet soit maximum. (N. A., **1129.**)

(*Gambey, Ed. Lucas*, **75**, 83, 269.)

51. On donne un secteur circulaire dont l'angle au centre

est 2α, et l'on demande d'inscrire dans ce secteur, en plaçant deux sommets sur l'arc, un rectangle dont la surface soit maximum. (J. M., 7.)

(*Biette,* **77**, 215.)

52. Inscrire dans une sphère donnée un prisme triangulaire régulier de volume maximum. Ce maximum est égal au cube du rayon de la sphère. (Martus, J. M., **41**.)

(*Bernaou,* **77**, 254.)

53. Parmi tous les triangles MNP, que l'on forme en abaissant d'un point quelconque M du côté AB d'un triangle ABC, des perpendiculaires MN, MP sur les deux autres côtés AC, BC, quel est celui dont la surface est maximum?

(Arnoye, J. M., **57**.)

(*Dilhan,* **78**, 57.)

54. Deux mobiles se déplacent sur deux axes rectangulaires et se dirigent avec des vitesses v et v' vers le point d'intersection de ces axes, dont ils sont, à un moment donné, à des distances a et b. A quel instant ces deux mobiles sont-ils le plus proches l'un de l'autre? (J. M., **72**.)

(*De Fonseca,* **78**, 117.)

55. Un cône équilatéral étant inscrit dans une sphère, déterminer entre quelles limites peut varier la différence des sections faites dans ces deux corps, par un plan parallèle à la base du cône. (J. M., **73**.)

(*Vautré,* **78**, 118.)

56. Trouver le minimum du volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles circonscrit à un hémisphère. (J. M., **323**.)

(*Joly,* **81**, 355.)

57. Déterminer le minimum du rapport de la somme des

volumes engendrés par un triangle rectangle tournant successivement autour des côtés de l'angle droit, au volume engendré en tournant autour de l'hypoténuse, en supposant que le périmètre du triangle soit constant, les côtés étant variables.

(Lauvernay, J. E., **31**.)

(*Puig*, **82**, 236.)

PROGRESSIONS ET SÉRIES.

Progressions arithmétiques.

58. Étant donnée une progression arithmétique de n termes, la moitié de n fois le dernier terme est toujours comprise entre la somme de tous les termes, et cette somme diminuée du dernier terme; démontrer cette proposition par la Géométrie ([1]).

(Maclaurin, N. A., **113**.)

(*Dormoy*, **46**, 348.)

59. Étant donnée une progression arithmétique de n termes, élevant chaque terme au carré, le tiers de n fois le carré du dernier terme est toujours compris entre la somme de tous les carrés, et cette même somme moins le carré du dernier terme; démontrer cette proposition par la Géométrie. (N. A., **121**.)

(**47**, 179.)

60. Les trois côtés d'un triangle a, b, c sont exprimés par des nombres entiers en progression arithmétique; et si l'on ajoute successivement 50 et 60 à chacun de ses côtés, le rayon du cercle inscrit augmente, respectivement, de 17 et de 20 : trouver les valeurs des côtés de ce triangle.

(Whitworth, N. A., **1379**.)

(*Borletti*, **82**, 377.)

([1]) L'énoncé n'est pas rigoureusement exact. Il faut une condition, qu'on trouve du reste dans la solution indiquée.

61. On dispose la suite des nombres naturels de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2, & 3, & 4 & \\ 5, & 6, & 7, & 8, & 9 \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

Démontrer que la somme des nombres d'une horizontale quelconque est la somme de deux cubes consécutifs.

(DE ROCQUIGNY, M., **149**.)

(*Lambert*, **83**, 63, 78.)

62. Soient données les deux progressions arithmétiques

$$\begin{array}{lllll} 1, & 1+2^m, & 1+2.2^m, & 1+3.2^m, & \ldots, \\ 1, & 1+2^{m+1}, & 1+2.2^{m+1}, & 1+3.2^{m+1}, & \ldots. \end{array}$$

On partage les termes de la seconde en groupes de termes consécutifs, tels que le nombre de termes du premier groupe soit égal au premier terme de la première progression; soit S_p la somme des termes de ce groupe. Démontrer que S_p est un cube parfait. Si l'on intervertit les rôles des deux groupes, la somme S'_p des termes du premier groupe de la première progression est la somme de deux cubes.

(DE ROCQUIGNY, M., **625**.)

(*François*, **89**, 102.)

63. Lorsque les trois côtés d'un triangle rectangle sont en progression arithmétique, le rayon du cercle inscrit est égal à la raison de cette progression. (ARNOYE, J. M., **56**.)

(*Pyolle*, **78**, 30.)

64. Trouver trois nombres en progression arithmétique ayant r pour raison, dont la somme égale le produit; application au cas où $r=1$. (HAIN, J. M., **67**.)

(*Cordeau*, **78**, 62.)

65. Trouver cinq nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme et leur produit. (J. M., 322.)

(*Rivard,* **81**, 354.)

Progressions géométriques et autres séries.

66. Dans une progression géométrique de quatre termes, on donne la somme des antécédents et la somme des conséquents; trouver ces termes sans opérer d'élimination.

(CARDAN, N. A., 329.)

(*Finot, Geneix-Martin,* **56**, 303; **81**, 280.)

67. Si l'on ajoute terme à terme deux progressions géométriques qui n'ont pas même raison, les résultats ne forment pas une progression, mais chaque terme pourra se déduire des deux précédents, en les multipliant par des nombres constants et ajoutant les résultats. (J. M., 8.)

(*Long,* **77**, 154.)

68. Les premiers termes d'une série sont 1, 7, 19, ..., mais on a perdu la loi de récurrence des termes de cette série; on sait seulement que le terme général u_n était une fonction entière et du second degré en n. Retrouver cette série et démontrer que la somme des n premiers termes est égale à n^3.

(DE LONGCHAMPS, J. E. 63.)

(*Chollet,* **83**, 22.)

69. Trois nombres entiers sont en progression géométrique; si le second augmente de 8, la progression devient arithmétique; mais si, alors, le dernier terme augmente de 64, elle redevient géométrique. Trouver les nombres. (J. E., 83.)

(*Youssoufian,* **83**, 159.)

70. On considère une suite de termes

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad \ldots, \quad u_{2n-1}, \quad u_{2n}$$

qui jouissent de cette propriété que si l'on considère quatre termes consécutifs dans cette suite, le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens. On donne les trois premiers termes u_1, u_2, u_3, et l'on demande de trouver la somme S_{2n} des $2n$ premiers termes. On supposera que u_3 est un nombre différent de u_1. (De Longchamps, J. E., **109**.)

(*Millot*, **84**, 117.)

71. Soient $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ des nombres tels que l'un quelconque d'entre eux soit égal au produit des deux nombres précédents. Démontrer que, en désignant par P_n le produit de ces nombres, on a

$$P_n = u_2 P_{n-1} P_{n-2};$$

les nombres u_1 et u_2 sont supposés quelconques.

(De Longchamps, J. E., **110**.)

(*Vigneron*, **84**, 118.)

72. Si l'on ajoute, terme à terme, m progressions géométriques, la suite U obtenue est récurrente; c'est-à-dire qu'à partir du terme de rang $m+1$, les autres sont fournis par une fonction des m précédents; cette fonction est linéaire.

(Boutin, J. E., **232**.)

(*H. Martin*, **88**, 213.)

73. On donne a et α_1; puis on calcule $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, par voie récurrente, au moyen de la formule

$$a(n-1)\alpha_n = \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_2\alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_1.$$

Démontrer que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ forment une progression géométrique. (De Longchamps, J. E., **354**.)

(*Beyens*, **91**, 20.)

ÉQUATIONS A RÉSOUDRE.

—

Équations du troisième degré.

74. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=0,$$

et plus généralement

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0;$$

on fera voir que les trois racines sont toujours réelles, et même toujours commensurables si a^2+b^2 est un carré.

(De Longchamps, J. E., **60**.)

(*Marsy,* **82**, 275.)

75. Résoudre l'équation

$$\begin{aligned}&a(a+x)(a+2x)(a+3x)\\=&\,b(b+x)(b+2x)(b+3x).\end{aligned}$$

(De Longchamps, J. E., **205**.)

(*Gelin,* **87**, 259.)

76. Résoudre l'équation

$$(\alpha x+\beta)^3+(\alpha' x+\beta')^3+x^3=3(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')x.$$

Déduire de là, en supposant $\alpha=\alpha'=0$, une méthode élémentaire pour résoudre l'équation du troisième degré.

(De Longchamps, J. E., **290**.)

(*Sludler,* **89**, 261.)

77. Résoudre l'équation

$$(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)(a+b+c)-abcx=0.$$

(De Longchamps, J. E., **292**.)

78. Résoudre les équations

$$(1)\quad \begin{cases} (2x+b+c)(2x+c+a)(2x+a+b) \\ \qquad +(x+a)(x+b)(x+c)=0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 8(x+a)(x+b)(x+c) \\ +(x+b+c-a)(x+c+a-b)(x+a+b-c)=0, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} 8(x+b+c-a)(x+c+a-b)(x+a+b-c) \\ +(x+3a-b-c)(x+3b-c-a)(x+3c-a-b)=0, \end{cases}$$

et trouver la *clef* qui permet de former, en nombre indéfini, les équations du même genre. (DE LONGCHAMPS, J. E., **293**.)

(*Boutin*, **89**, 235.)

79. Résoudre les équations

$$\frac{x-b-c}{x-2a}+\frac{x-c-a}{x-2b}+\frac{x-a-b}{x-2c}+1=0,$$

$$\frac{2x+c-b}{x+b-c}+\frac{2x+a-c}{x+c-a}+\frac{2x+b-a}{x+a-b}+2=0,$$

$$\frac{x+b+c-a}{x+3a+b-c}+\frac{x+c+a-b}{x+3b-c-a}+\frac{x+a+b-c}{x+3c-a-b}+1=0,$$

....

et reconnaître que la *clef* qui peut servir à former, en nombre indéfini, les équations de ce genre est représentée par l'identité

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)-\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ -\beta\gamma(\beta+\gamma)-\alpha\gamma(\alpha+\gamma)-2\alpha\beta\gamma=0.\end{aligned}$$

Remarque. — Avec cette clef on peut aussi obtenir, en nombre indéfini, des équations de second degré donnant des racines commensurables; par exemple

$$\frac{x+a}{b}+\frac{x+b}{a}+\frac{a+b}{x}+2=0,$$

....

(DE LONGCHAMPS, J. E., **302**.)

(*Sollertinsky*, **90**, 70.)

80. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-b-c+a}=0,$$

et vérifier qu'elle a toutes ses racines réelles.

(DE LONGCHAMPS, J. E., **307**.)

(*Beyens*, **90**, 119.)

Équations du quatrième degré.

81. Discuter les racines de l'équation

$$x^4+[2d(d-a)-b]x^2+d^2[(d-a)^2-b]=0,$$

où d est un paramètre variable de $-\infty$ à $+\infty$; a, b sont des nombres positifs constants. Trouver la condition pour que le produit de deux racines soit égal à la somme des deux autres.

(M., **757**.)

(*Joachimescu*, **92**, 233.)

82. Résoudre l'équation

$$(x-a)^3(x+a-2b)-(a-b)^3(a+b-2x)=0.$$

(GELIN, M., **769**.)

(*Brocard*, **92**, 211.)

83. Résoudre l'équation

$$x^4+ax^3+bx^2+adx+d^2=0.$$ (J. E., **3**.)

(*Germain*, **82**, 230.)

84. On considère l'équation du quatrième degré

$$(x+\alpha)(x+\alpha+1)(x+\alpha+2)(x+\alpha+3)+h=0.$$

On propose de résoudre cette équation, et de montrer que ses racines sont imaginaires si h est supérieur à 1, deux à deux à deux coïncidentes si $h=1$, et réelles si h est inférieur à 1.

(DE LONGCHAMPS, J. E., **58**.)

(*Berthelot*, **83**, 19.)

85. Résoudre l'équation

$$x(x+\alpha)(x+\beta)(x+\alpha+\beta)+h=0.$$

(De Longchamps, J. E., **59**.)

(*Chevalier*, **83**, 20.)

86. Résoudre l'équation

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x+2}+\frac{3x}{x+3}+\frac{4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0.$$

(De Longchamps, J. E., **61**.)

(*Bablon*, **83**, 21.)

87. Résoudre l'équation

$$(ax^2+bx+c)^2=x^2(Ax^2+bx+c),$$

en supposant, bien entendu,

$$A-a\neq 0.$$ (De Longchamps, J. E., **266**.)

(*Gelin*, **88**, 263.)

88. Résoudre l'équation

$$\alpha(x^2-px+q)^2+\beta(x^2+px+q)^2=x^2.$$

(De Longchamps, J. E., **291**.)

(*Emmerich*, **89**, 238.)

89. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x(x-a)(x-b)}+\frac{1}{a(a-x)(a-b)}+\frac{1}{b(b-x)(b-a)}+\frac{1}{ax^2-abx-a^3}=0.$$

(De Longchamps, J. E., **332**.)

(*Svechnikoff*, **90**, 192.)

90. Résoudre les équations

1°

$$(a-b)^2(2x-a-b)^2+(b-x)^2(2a-b-x)^2 + (a-x)^2(2b-a-x)^2 = 2K^2.$$

2°

$$(a-b)^2(2x-a-b)^2 + (b-x)^2(2a-b-x)^2+(a-x)^2(2b-a-x)^2$$
$$=(a'-b')^2(2x-a'-b')^2 + (b'-x)^2(2a'-b'-x)^2+(a'-x)^2(2b'-a'-x)^2.$$

(De Longchamps, J. E., **400**.)

(*Sollertinsky*, **91**, 45.)

Autres équations.

91. Étant donnée l'équation

$$abc = x\left(a\sqrt{4x^2-a^2}+b\sqrt{4x^2-b^2}+c\sqrt{4x^2-c^2}\right),$$

en tirer analytiquement la valeur

$$x=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

où

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c).$$ (N. A., **69**.)

(*Lebesgue*, **47**, 350.)

92. Résoudre et discuter l'équation

$$+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1.$$

Afin de bien faire comprendre quelle est ici la question proposée, il suffira de rappeler en peu de mots ce que l'on trouve dans les Traités d'Algèbre, au sujet de la résolution des équations irrationnelles. On fait disparaître les radicaux; puis on observe que l'équation rationnelle ainsi obtenue doit avoir parmi ses racines, non seulement celles de l'équation proposée, mais encore les racines de toutes les équations irrationnelles qu'il est

possible de former, en prenant chaque radical avec toutes ses déterminations algébriques. Or, en opérant de cette manière sur l'équation

$$+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1,$$

on parvient à l'équation $x^2=\frac{3}{4}$, dont les racines sont $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Aucune de ces deux valeurs ne peut convenir à l'équation proposée, car il est évident que l'équation

$$+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$$

ne peut admettre une racine réelle. C'est ce que l'on propose d'expliquer. (N. A.. **82.**)

(*Gilain*, **45**, 520.)

93. Résoudre algébriquement l'équation

$$[(x+2)^2+x^2]^3=8x^4(x+2).$$ (LEBASTEUR, N. A., **725.**)

(*Renaud*, **66**, 279, 429.)

94. Résoudre l'équation

$$\left(\frac{a-b}{x}+\frac{b-x}{a}+\frac{x-a}{b}\right)\left(\frac{x}{a-b}+\frac{a}{b-x}+\frac{b}{x-a}\right)=9.$$

(PRIOR, M., **1.**)

(*Verhelst*, **81**, 42, 58.)

95. Résoudre l'équation

$$x^n-x^{-n}=3(1+x^{-n})$$ (J. M., **11.**)

(*Biette*, **77**, 91.)

96. Résoudre l'équation

$$\sqrt[n]{\frac{a+x}{a}}+\sqrt[n]{\frac{a+x}{x}}=\sqrt[n]{\frac{x}{b}}.$$ (J. M., **325.**)

(*Blessel*, **81**, 399; J. E., **85**, 258.)

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS.

—

Deux inconnues.

97. Résoudre le système d'équations

$$\frac{y(1+x^2)}{x(1+y^2)} = a, \qquad \frac{y(1-x^2)}{x(1-y^2)} = b. \quad (\text{M., } \mathbf{117}.)$$

(*Verhelst,* **82**, 155.)

98. Résoudre le système

$$\frac{y}{x} \times \frac{1+x^2}{1+y^2} = a, \qquad \frac{y^3}{x^3} \times \frac{1+x^6}{1+y^6} = b^3. \quad (\text{M., } \mathbf{527}.)$$

(*Cesaro,* **86**, 278.)

99. Trouver les rapports des inconnues dans les équations

$$\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)} = \frac{cx+az}{y(ax-by+cz)} = \frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)}.$$

(Lemoine, M., **573**.)

(*Emmerich,* **87**, 261.)

100. Résoudre les deux équations

$$x^y = y^x, \qquad x^p = y^q,$$

relations qui doivent exister entre p et q pour que x et y soient rationnels. (Weill, J. M., **61**.)

(*Bernard,* **78**, 115.)

101. Reconnaître que les équations

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + c = 0, \qquad \frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + c = 0,$$

$$(b+c)x + (a+c)y + (a+b) = 0$$

sont compatibles. (De Longchamps, J. M., **63**.)

(*Vautré,* **78**, 116.)

102. Résoudre le système d'équations

$$\frac{1}{ax-by-1}+\frac{1}{by-ax-1}=\frac{1}{ax+by-1}, \qquad bx+ay=m.$$

(J. M., **281**.)

(*Joly*, **81**, 219.)

103. Résoudre le système

$$\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\frac{121}{13}; \qquad x+y=2.$$ (J. M., **284**.)

(*Malcor*, **81**, 220.)

104. Résoudre le système

$$xy(x+y)=ab(a+b),$$
$$(x-y)(x+2y)(2x+y)=(a-b)(a+2b)(2a+b).$$

(E. Lucas, J. E., **72**.)

(*Bourgarel*, **84**, 109.)

105. On propose de résoudre les deux équations

$$x\frac{x^2+y^2-d(x+y)}{(y+x-d)(x^2+y^2)}=\frac{a}{d},$$
$$y\frac{x^2+y^2-d(x+y)}{(y+x-d)(x^2+y^2)}=\frac{b}{d};$$

on vérifiera que les formules demandées s'obtiennent par la simple permutation des lettres a et x d'une part, b et y de l'autre. (De Longchamps, J. E., **76**.)

(*Vialard*, **83**, 134.)

Plus de deux inconnues.

106. Résoudre le système d'équations

$$y^2+z^2-x(y+z)=a,$$
$$z^2+x^2-y(z+x)=b,$$
$$x^2+y^2-z(x+y)=c.$$ (M., **112**.)

(*Bortier*, **82**, 138.)

107. Résoudre le système

$$x^3 - a = y^3 - b = z^3 - c = xyz.$$ (Morley, M., **477.**)

(*Béjot*, **86**, 45.)

108. Résoudre le système

$$(x + 2y)(x + 2z) = a^2,$$
$$(y + 2x)(y + 2z) = b^2,$$
$$(z + 2x)(z + 2y) = c^2.$$ (Morley, M., **482.**)

(*Beyens*, **86**, 69.)

109. Résoudre le système

$$a\sqrt{(x - y + z)(x + y - z)} = x\sqrt{yz},$$
$$b\sqrt{(x + y - z)(-x + y + z)} = y\sqrt{xz},$$
$$c\sqrt{(-x + y - z)(x - y + z)} = z\sqrt{xy}.$$ (M., **648.**)

(*Brocard*, **89**, 258.)

110. Pour que les équations

$$y^2 + z^2 - 2ayz = 0, \qquad z^2 + x^2 - 2bzx = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2cxy = 0$$

soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2abc = 1.$$ (Neuberg, M., **658.**)

(*Brandza*, **90**, 22.)

111. Résoudre le système

$$x^2(y - z) = a, \qquad y^2(z - x) = b, \qquad z^2(x - y) = c.$$

(M., **664.**)

(*Beyens*, **90**, 44.)

112. Résoudre le système

$$xyz + x - y - z = a(1 + yz - zx - xy),$$
$$xyz + y - z - x = b(1 + zx - xy - yz),$$
$$xyz + z - x - y = c(1 + xy - yz - zx).$$ (M., **718.**)

(*Mandart*, **91**, 210.)

113. Résoudre le système d'équations

$$(x+y)(x-y)^2-(y+z)(y-z)^2=(z+x)(z-x)^2.$$

(MOORE, M., 753.)

(*Emmerich*, **92**, 121.)

114. Résoudre le système

$$\frac{a^3x}{y^2z^2}=\frac{b^3y}{z^2x^2}=\frac{c^3z}{x^2y^2}=1. \quad \text{(J. M., 12.)}$$

(*Vautré*, **77**, 92.)

115. Résoudre le système

$$x+y+z=1, \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, \qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=1.$$

(DE LONGCHAMPS, J. M., 64.)

(*Westphalen*, **78**, 89.)

116. Résoudre le système

$$x+y+z=(a+b+c)(a+b-c),$$
$$xy+xz-yz=b[(a+c)(a-c)(2a-b)+2ab^2],$$
$$x^2+y^2+z^2=(a^2+b^2-c^2)^2+2b^2(a^2+c^2).$$

(COMBIER, J. M., 202.)

(*Harel*, **80**, 366.)

117. Résoudre le système d'équations à trois inconnues

$$\frac{x^2-y^2-z^2-d^2}{x^2+y^2+z^2+d^2}=\frac{a}{d},$$
$$\frac{2y(x-d)}{x^2+y^2+z^2-d^2}=\frac{b}{d},$$
$$\frac{2z(x-d)}{x^2+y^2+z^2-d^2}=\frac{c}{d},$$

en supposant $a^2+b^2+c^2$ différent de d^2.

(DE LONGCHAMPS, J. E., 54.)

(*Toussaint*, **83**, 17.)

118. Résoudre les équations

$$x^2 - yz = a^2,$$
$$y^2 - xz = b^2,$$
$$z^2 - xy = c^2,$$

en déduisant de celles-ci deux équations du premier degré.

(J. E., **181**.)

(*Drago*, **86**, 259, 282.)

119. Résoudre les équations

$$a(xy + yz + zx) = xyz,$$
$$y^2x^2 + z^2y^2 + x^2z^2 = 2xyz(x + y + z),$$
$$a(x + y + z)^2 = 4xyz.$$

On vérifiera qu'elles admettent *six* solutions et que ces solutions sont réelles. (De Longchamps, J. E., **207**.)

(**87**, 238.)

120. Résoudre les équations

$$x(y + z + xyz) = a,$$
$$y(z + x + xyz) = b,$$
$$z(x + y + xyz) = c.$$

(Beyens, J. E., **239**.)

(*Boutin*, **88**, 229.)

121. Résoudre le système suivant

$$x^4 + a - b = y^4 + c - d = z^4 + b - c = u^4 + d - a = xyzu.$$

(Beyens, J. E., **245**.)

(*Gelin*, **88**, 230.)

122. Résoudre les équations

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3.$$

(Svechnikoff, J. E., **343**.)

(*Boutin*, **90**, 239.)



123. Résoudre les équations

$$x + y + z + t = 4m,$$
$$x^2 + y^2 - z^2 + t^2 = 4m^2 - 4q^2,$$
$$x^3 + y^3 - z^3 - t^3 = 4m^3 + 16mq^2,$$
$$x^4 + y^4 + z^4 - t^4 = 4m^4 + 24m^2q^2 + 4q^4 + 4p^4.$$

(SVECHNIKOFF, J. E., **345**.)

124. Résoudre les équations

$$(y - z + b^2 - c^2)^2 = 4a^2x,$$
$$(z - x + c^2 - a^2)^2 = 4b^2y,$$
$$(x - y + a^2 - b^2)^2 = 4c^2z.$$

(DE LONGCHAMPS, J. E., **391**.)

(*De Strékalof*, **91**, 280.)

125. Résoudre le système des trois équations

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y - z} = \frac{1}{b + c}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z - x} = \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x - y} = \frac{1}{c}.$$

(LAUVERNAY, J. E., **450**.)

QUESTIONS DIVERSES.

126. Si l'on élève à la même puissance positive les trois côtés d'un triangle rectangle, la somme des puissances des côtés est plus grande que la puissance de l'hypoténuse lorsque l'exposant de la puissance est moindre que 2, et moins grande si cet exposant surpasse 2. (N. A., **118**.)

(*Drouets*, **46**, 413, 479; *Colombier*, **52**, 451.)

127. Donner la formule générale des quantièmes d'années où février a cinq dimanches. (N. A., **128**.)

(*Coupy*, **53**, 126.)

128. Connaissant la somme de deux nombres et le produit de



118. Résoudre les équations

$$x^2 - yz = a^2,$$
$$y^2 - xz = b^2,$$
$$z^2 - xy = c^2,$$

en déduisant de celles-ci deux équations du premier degré.

(J. E., **181**.)

(*Drago*, **86**, 259, 282.)

119. Résoudre les équations

$$a(xy + yz + zx) = xyz,$$
$$y^2x^2 + z^2y^2 + x^2z^2 = 2xyz(x + y + z),$$
$$a(x + y + z)^2 = 4xyz.$$

On vérifiera qu'elles admettent *six* solutions et que ces solutions sont réelles. (De Longchamps, J. E., **207**.)

(**87**, 238.)

120. Résoudre les équations

$$x(y + z + xyz) = a,$$
$$y(z + x + xyz) = b,$$
$$z(x + y + xyz) = c.$$

(Beyens, J. E., **239**.)

(*Boutin*, **88**, 229.)

121. Résoudre le système suivant

$$x^4 + a - b = y^4 + c - d = z^4 + b - c = u^4 + d - a = xyzu.$$

(Beyens, J. E., **245**.)

(*Gelin*, **88**, 230.)

122. Résoudre les équations

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3.$$

(Svechnikoff, J. E., **343**.)

(*Boutin*, **90**, 239.)

123. Résoudre les équations

$$x + y + z + t = 4m,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4m^2 + 4q^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 4m^3 + 16mq^2,$$
$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 4m^4 + 24m^2q^2 + 4q^4 + 4p^4.$$

(SVECHNIKOFF, J. E., **345**.)

124. Résoudre les équations

$$(y - z + b^2 - c^2)^2 = 4a^2x,$$
$$(z - x + c^2 - a^2)^2 = 4b^2y,$$
$$(x - y + a^2 - b^2)^2 = 4c^2z.$$

(DE LONGCHAMPS, J. E., **391**.)

(*De Strékalof*, **91**, 280.)

125. Résoudre le système des trois équations

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y-z} = \frac{1}{b+c}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z-x} = \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x-y} = \frac{1}{c}.$$

(LAUVERNAY, J. E., **450**.)

QUESTIONS DIVERSES.

126. Si l'on élève à la même puissance positive les trois côtés d'un triangle rectangle, la somme des puissances des côtés est plus grande que la puissance de l'hypoténuse lorsque l'exposant de la puissance est moindre que 2, et moins grande si cet exposant surpasse 2. (N. A., **118**.)

(*Drouets*, **46**, 413, 479; *Colombier*, **52**, 451.)

127. Donner la formule générale des quantièmes d'années où février a cinq dimanches. (N. A., **128**.)

(*Coupy*, **53**, 126.)

128. Connaissant la somme de deux nombres et le produit de

la somme de leurs carrés par la somme de leurs cubes, trouver ces nombres. (CARDAN, N. A., **328**.)

(*Jozon,* **56**, 300.)

129. Construire un triangle, connaissant les longueurs des trois bissectrices intérieures ([1]). (N. C., **57**, **222**.)

(N. A., **42**, 87.)

130. Un cercle étant divisé en $2m$ secteurs égaux, tels que AOB, BOC, COD, ..., on construit une première série de cercles tangents, intérieurement, aux rayons OA, OB, OC, ... et à la circonférence donnée; puis on joint les centres de ces cercles au point O, et l'on obtient ainsi des lignes Oa, Ob, Oc, ... On construit une deuxième série de cercles tangents, intérieurement, aux rayons Oa, Ob, Oc, ... et aux cercles de la première série. On continue cette construction d'une manière semblable, et l'on demande :

1° L'expression des rayons des cercles des séries successivement obtenues;

2° La limite de la surface totale des cercles intérieurs.

(PH. BRETON, N. C., **517**.)

(*Fauquembergue*, **80**, 134.)

131. Application de la Géométrie à l'Algèbre. Étant donnés trois nombres p, q, c, on décompose le troisième en deux parties a, b, de manière que

$$\frac{b}{p^2} + \frac{a}{q^2} = \frac{1}{c}.$$

On fait ensuite

$$p' = \frac{ac}{q}, \qquad q' = \frac{ap}{q}.$$

Cela posé, toutes les solutions des équations

$$\frac{u}{p} + \frac{v}{q} = 1, \qquad \frac{v}{p'} + \frac{w}{q'} = 1$$

([1]) C'est à la demande d'un de nos lecteurs que nous proposons ce problème, algébrique plutôt que géométrique. (*Note de M. Catalan.*)

rendent identique l'équation

$$au^2 + bv^2 - cw^2 = abc.$$ (CATALAN, M., **66.**)

(*Bastin*, **83**, 38.) [1].

132. Inscrire dans une sphère un cône dont la surface totale, augmentée de la surface latérale, soit égale à la surface de la sphère. (JULLIARD, J. M., **37.**)

(*Mahieux*, **77**, 252.)

133. Trouver cinq nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des trois autres. (ARNOYE, J. M., **55.**)

(*Chellier*, **78**, 30.)

134. Trouver trois nombres tels que les produits de chacun d'eux par la somme des deux autres soient 20, 18, 14. (J. M., **74.**)

(*Schmitz*, **78**, 93.)

135. Un nombre est composé de trois chiffres. Le carré du chiffre des dizaines est égal au produit des chiffres extrêmes augmenté de 4. La différence entre le double du chiffre des dizaines et celui des unités est égale au chiffre des centaines, et quand on écrit les chiffres de ce nombre dans un ordre inverse, on obtient un second nombre qui, retranché du premier, donne pour reste 390 augmenté du chiffre des dizaines commun à ces deux nombres. Trouver ce nombre. (J. M., **75.**)

(*Meneau*, **78**, 119.)

136. Quelles sont les heures auxquelles on peut faire permuter les deux aiguilles d'une horloge de façon que la nouvelle position puisse se produire par le mouvement même de l'horloge? (LAISANT, J. E., **47.**)

(*Landry*, **82**, 258.)

---

[1] La solution indiquée repose sur l'emploi de la Géométrie analytique à trois dimensions. Il y aurait lieu d'en rechercher une autre purement élémentaire.

137. Si les racines de l'équation du quatrième degré

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

sont en progression arithmétique :

1° La raison r de la progression est donnée par la formule

$$r = \pm \frac{1}{10}\sqrt{15 a_1^2 - 40 a_2};$$

2° Les deux termes extrêmes sont les racines de l'équation

$$40x^2 + 20 a_1 x - 11 a_1^2 + 36 a_2 = 0;$$

3° Les deux termes du milieu sont les racines de l'équation

$$20x^2 + 10 a_1 x + a_1^2 + 4 a_2 = 0.$$ (Russo, J. E., **260.**)

(*Gelin*, **88**, 285.)

138. Trouver quatre nombres entiers, positifs, inégaux, tels que leur somme soit égale à la somme obtenue en ajoutant au produit du plus grand par le plus petit le produit des deux autres.

N.-B. — Ce problème comporte une infinité de solutions, le plus grand nombre étant arbitraire. (Bénézech, J. E., **411.**)

(*Bénézech*, **92**, 235.)

TRIGONOMÉTRIE.

FONCTIONS CIRCULAIRES.

Angles quelconques. — Formules finies.

1. Dans le premier quadrant, la somme des sinus d'un nombre quelconque d'arcs, divisée par la somme des cosinus de ces mêmes arcs, donne un quotient compris entre la tangente du plus grand de ces arcs et la tangente du plus petit de ces arcs. (N. A., **346**.)

(*Forestier*, **57**, 19.)

2. Démontrer la relation

$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)}{\sin\alpha_0\sin(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}$$
$$=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0\sin(\alpha_0+\alpha_1)}+\frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_0+\alpha_1)\sin(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}+\ldots$$
$$+\frac{\sin\alpha_n}{\sin(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})\sin(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}.$$

(Werner, N. A., **442**.)

(*De Virieu*, **58**, 393.)

3. Si

$$\frac{\sin P}{\sin\varphi}=\operatorname{tang}\varphi,$$

on a

$$\operatorname{tang}\frac{P-\varphi}{2}\cot\frac{P+\varphi}{2}=\operatorname{tang}(\varphi-45^\circ).$$ (N. A., **530**.)

(*Forestier*, **60**, 418.)

4. Démontrer la relation

$$\cos(a+b+c)\cos(a+b-c)\cos(a+c-b)\cos(b+c-a)$$
$$-4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c$$
$$=-(\cos a+\cos b+\cos c)(\cos a+\cos b-\cos c)$$
$$\times(\cos a+\cos c-\cos b)(\cos b+\cos c-\cos a).$$

(CATALAN, N. A., **641**.)

(*Picquet*, **63**, 275, 456.)

5. Démontrer la relation suivante :

$$(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c)^2-4\sin^2(a+b+c)$$
$$\times(\cos^2 a\cos^2 b+\cos^2 b\cos^2 c+\cos^2 a\cos^2 c)$$
$$-4\cos a\cos b\cos c\cos(a+b+c)$$
$$\times[\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+\cos^2(a+b+c)]$$
$$-2\cos^2(a+b+c)(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c)$$
$$+4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c$$
$$+8\cos a\cos b\cos c\cos(a+b+c)+\cos^4(a+b+c)=0.$$

(STREBOR, N. A., **653**.)

(*De Virieu*, **63**, 457.)

6. Démontrer la relation

$$m=\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\sin\frac{3\pi}{m}\cdots\sin\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m}\sin\frac{5\pi}{2m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right\}^2,$$

dans laquelle m est un nombre entier pair.

(CATALAN, N. A., **746**.)

(*Busco*, **66**, 229.)

7. Vérifier l'identité

$$\cos^n x-\frac{n(n-1)}{2.2}\cos^{n-2}x\sin^2 x$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2.4.4}\cos^{n-4}x\sin^4 x-\ldots$$
$$=\cos 2^n\frac{x}{2}-\left(\frac{n}{1}\right)^2\cos 2^{n-2}\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}$$
$$+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2\cos 2^{n-4}\frac{x}{2}\sin^4\frac{x}{2}-\ldots.$$

(CATALAN, N. C., **162**.)

(*Freson*, **77**, 251.)

8. Démontrer la relation

$$\begin{aligned}\cos(b-c)\cos(b+c+d)+\cos a\cos(a+d)\\ =\cos(c-a)\cos(c+a+d)+\cos b\cos(b+d)\\ =\cos(a-b)\cos(a+b+d)+\cos c\cos(c+d)\\ =\cos a\cos(a+d)+\cos b\cos(b+d)+\cos c\cos(c+d)-\cos d.\end{aligned}$$

(Cayley, N. C., **474**.)

(*Cauret*, **79**, 216.)

9. Démontrer que

$$\begin{aligned}\sin^3 a\sin(b-c)+\sin^3 b\sin(c-a)+\sin^3 c\sin(a-b)\\ =\sin(a+b+c)\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c).\end{aligned}$$

(M., **110**.)

(*Pisani*, **82**, 136, 242; **83**, 45.)

10. Démontrer que, pour toutes les valeurs de A, B, C,

$$\begin{aligned}\cos 2A\cos^2(B+C)+\cos 2B\cos^2(C+A)+\cos 2C\cos^2(A+B)\\ =2\cos(A+B)\cos(B+C)\cos(C+A)+\cos 2A\cos 2B\cos 2C.\end{aligned}$$

(M., **113**.)

(*Pisani*, **82**, 139.)

11. On a, quel que soit n,

$$\begin{aligned}\cos^2 x+\cos^2\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\\ +\cos^2\left(x+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\cos^2\left[x+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]=\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

(M., **125**.)

(*Lambert*, **82**, 185, 242.)

12. n étant un nombre entier quelconque, démontrer que

$$\cos\frac{2\pi}{n}+2\cos\frac{4\pi}{n}+3\cos\frac{6\pi}{n}+\ldots+(n-1)\cos\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2},$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}+2\sin\frac{4\pi}{n}+3\sin\frac{6\pi}{n}+\ldots+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=-\frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{n}.$$

(Neuberg, M., **271**.)

(*Gillet*, **84**, 46.)

13. Démontrer les formules suivantes dans lesquelles a, b, c sont trois arcs quelconques :

$$\Sigma \sin 2a \sin^2(b-c) = 2\Sigma \sin(a+b)\sin(a-c)\sin(b-c),$$
$$\Sigma \cos 2a \sin^2(b-c) = 2\Sigma \cos(a+b)\sin(a-c)\sin(b-c),$$
$$\Sigma \sin^2(a-b) = 2\Sigma \cos(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c).$$

(Gillet, M., 375.)

(*Gillet*, **86**, 67.)

14. Démontrer que l'équation

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)=0$$

entraîne les suivantes :

$$[\mathrm{S}\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta+\gamma)]^2 : \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4,$$

$$[\mathrm{S}\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta+\gamma)] : [\mathrm{S}\,\text{séc}\,\alpha-\text{séc}(\alpha+\beta+\gamma)]=4,$$

$$\left[\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\right]^{\frac{1}{2}}=1,$$

$$\left[\frac{\cos\beta\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{-\sin\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}=1.$$

(Wolstenholme, M., 543.)

(*Beyens*, **90**, 112.)

15. Mettre la relation

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c-\pi)+\mathrm{S}\cos\tfrac{1}{4}(3a-b-c+\pi)=0$$

sous la forme

$$\tan\!g\tfrac{1}{4}(a+b-c)\,\text{tang}\tfrac{1}{4}(a-b+c)\,\text{tang}\tfrac{1}{4}(-a+b+c)=1.$$

(Gelin, M., 740.)

(*Joachimescu*, **92**, 55.)

16. Démontrer que l'égalité de deux des rapports

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin 2\alpha-\sin\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(2\alpha-\beta-\gamma)},$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin 2\beta-\sin\frac{1}{2}(2\beta+\gamma+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(2\beta-\gamma-\alpha)},$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma-\sin\frac{1}{2}(2\gamma+\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(2\gamma-\alpha-\beta)}$$

entraîne celle des trois rapports. (RICHARDSON, M., **748.**)

(*Neuberg,* **92**, 207.)

17. Vérifier l'identité

$$\begin{aligned}&\text{tang}(a-b)\,\text{tang}(c-d)+\text{tang}(a-c)\,\text{tang}(d-b)+\text{tang}(a-d)\,\text{tang}(b-c)\\&=\text{tang}(a-b)\,\text{tang}(a-c)\,\text{tang}(a-d)\,\text{tang}(b-c)\,\text{tang}(c-d)\,\text{tang}(d-b).\end{aligned}$$

(NEUBERG, M., **770.**)

(*Emmerich,* **92**, 212.)

18. De l'égalité

$$2\cos\theta = u + \frac{1}{u}$$

on tire

$$2\cos n\theta = u^n + \frac{1}{u^n}. \quad \text{(J. M., 42.)}$$

(*Richard,* **77**, 315.)

19. Si α, β, γ sont trois angles différents satisfaisant à l'équation

$$\lambda\,\text{séc}\,x + \mu\,\text{coséc}\,x + \nu = 0,$$

prouver que l'on a

$$\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)=0. \quad \text{(J. M., 285.)}$$

20. Démontrer géométriquement que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\frac{p}{q} + \text{arc tang}\frac{q-p}{p+q}. \quad \text{(J. E., 84.)}$$

(*Youssoufian,* **83**, 176.)



13. Démontrer les formules suivantes dans lesquelles a, b, c sont trois arcs quelconques :

$$\Sigma \sin 2a \sin^2(b-c) = 2\Sigma \sin(a+b)\sin(a-c)\sin(b-c),$$
$$\Sigma \cos 2a \sin^2(b-c) = 2\Sigma \cos(a+b)\sin(a-c)\sin(b-c),$$
$$\Sigma \sin^2(a-b) = 2\Sigma \cos(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c).$$

(GILLET, M., **375**.)

(*Gillet,* **86**, 67.)

14. Démontrer que l'équation

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)=0$$

entraîne les suivantes :

$$[S\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta+\gamma)]^2 : \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4,$$

$$[S\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta+\gamma)] : [S\,\text{séc}\,\alpha-\text{séc}(\alpha+\beta+\gamma)]=4,$$

$$\left[\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\right]^{\frac{1}{2}}=1,$$

$$\left[\frac{\cos\beta\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{-\sin\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}=1.$$

(WOLSTENHOLME, M., **543**.)

(*Beyens,* **90**, 112.)

15. Mettre la relation

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c-\pi)+S\cos\tfrac{1}{4}(3a-b-c+\pi)=0$$

sous la forme

$$\text{tang}\tfrac{1}{4}(a+b-c)\,\text{tang}\tfrac{1}{4}(a-b+c)\,\text{tang}\tfrac{1}{4}(-a+b+c)=1.$$

(GELIN, M., **740**.)

(*Joachimescu,* **92**, 55.)

16. Démontrer que l'égalité de deux des rapports

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin 2\alpha - \sin\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(2\alpha-\beta-\gamma)},$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin 2\beta - \sin\frac{1}{2}(2\beta+\gamma+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(2\beta-\gamma-\alpha)},$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma - \sin\frac{1}{2}(2\gamma+\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(2\gamma-\alpha-\beta)}$$

entraîne celle des trois rapports. (RICHARDSON, M., **748.**)

(*Neuberg*, **92**, 207.)

17. Vérifier l'identité

$$\begin{aligned}&\operatorname{tang}(a-b)\operatorname{tang}(c-d)+\operatorname{tang}(a-c)\operatorname{tang}(d-b)+\operatorname{tang}(a-d)\operatorname{tang}(b-c)\\&=\operatorname{tang}(a-b)\operatorname{tang}(a-c)\operatorname{tang}(a-d)\operatorname{tang}(b-c)\operatorname{tang}(c-d)\operatorname{tang}(d-b).\end{aligned}$$

(NEUBERG, M., **770.**)

(*Emmerich*, **92**, 212.)

18. De l'égalité

$$2\cos\theta = u + \frac{1}{u}$$

on tire

$$2\cos n\theta = u^n + \frac{1}{u^n}.\quad \text{(J. M., 42.)}$$

(*Richard*, **77**, 315.)

19. Si α, β, γ sont trois angles différents satisfaisant à l'équation

$$\lambda\,\text{séc}\,x + \mu\,\text{coséc}\,x + \nu = 0,$$

prouver que l'on a

$$\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)=0.\quad \text{(J. M., 285.)}$$

20. Démontrer géométriquement que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang}\frac{p}{q} + \operatorname{arc\,tang}\frac{q-p}{p+q}.\quad \text{(J. E., 84.)}$$

(*Youssoufian*, **83**, 176.)

21. Démontrer la formule

$$\arccos\frac{a^2-b^2+(a^2+b^2)\cos x}{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos x}=2\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}\right).$$

(Boutin, J. E., **236**.)

(*Martin*, **88**, 225.)

22. Démontrer que l'on a

$$\left.\begin{aligned}&\sin a\sin(b-c)\sin(b+c-a)\\+&\sin b\sin(c-a)\sin(c+a-b)\\+&\sin c\sin(a-b)\sin(a+b-c)\end{aligned}\right\}=2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$$

et aussi

$$\left.\begin{aligned}&\cos a\sin(b-c)\cos(b+c-a)\\+&\cos b\sin(c-a)\cos(c+a-b)\\+&\cos c\sin(a-b)\cos(a+b-c)\end{aligned}\right\}=2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

(J. E., **267**.)

(*Lavieuville*, **89**, 43.)

23. Si ω tend vers λ, on a

$$\lim\frac{\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\beta)-\sin(\beta-\omega)}{\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\alpha)+\sin(\alpha-\omega)}=\left(\frac{\sin\dfrac{\lambda-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\lambda-\alpha}{2}}\right)^2.$$

(Lemoine, J. E., **433**.)

24. Démontrer que

$$\begin{vmatrix}1 & \cos\alpha & \cos(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta+\gamma) & \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta & \cos(\beta+\gamma) & \cos(\beta+\gamma+\delta)\\ \cos(\alpha+\beta) & \cos\beta & 1 & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta)\\ \cos(\alpha+\beta+\gamma) & \cos(\beta+\gamma) & \cos\gamma & 1 & \cos\delta\\ \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) & \cos(\beta+\gamma+\delta) & \cos(\gamma+\delta) & \cos\delta & 1\end{vmatrix}=0.$$

(Greenstreet, J. E., **436**.)

Angles quelconques. — Développements indéfinis.

25. Démontrer la formule

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tang} x} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \ldots.$$

(Euler, N. A., **951**.)

(*Chatelain*, **69**, 533; **70**, 89.)

26. Démontrer la formule

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots.$$ (Euler, N. A., **952**.) [1]

27. Démontrer la formule

$$\frac{4}{\pi} = \operatorname{tang} 45° + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{45°}{2}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{tang}\left(\frac{45°}{2}\right) + \ldots.$$

(Bourguet, N. A., **1167**.)

(*Stordeur*, **75**, 333.)

28. Étant donné l'arc $2a$, effectuer la somme S déterminée par la formule

$$S = 3 + \sin^4 a + \cos^4 a + \sin^6 a + \cos^6 a$$
$$+ \sin^8 a + \cos^8 a + \ldots + \sin^{2n} a + \cos^{2n} a + \ldots.$$

(J. M., **274**.)

(*Gino-Loria*, **81**, 91.)

Angles quelconques. — Problèmes.

29. Trouver la loi de développement de

1° $\sin(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)$;

(1) Si cette question n'a pas été résolue, c'est probablement à cause de son extrême facilité. Du reste, c'est une formule pour ainsi dire classique. (*Voir* à ce sujet une Note de S. Realis, N. A., **70**, 12.)

2° $\cos(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)$.

3° En déduire les formules connues pour $\sin na$, $\cos na$.

(N. A., 30.)

(*Vachette*, **42**, 345.)

30. Rendre calculable par logarithmes

$$\sin x = \frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \sin b}. \quad \text{(Catalan, N. A., 1226.)}$$

(*De Virieu*, **77**, 285, 376.)

31. Si m est impair, transformer

$$\cos^{m-1} x \sin x$$

en

$$A_1 \sin x + A_3 \sin 3x + \ldots + A_m \sin mx.$$

Quelles sont les valeurs des coefficients? (Catalan, M., 657.)

(*Klompers*, **90**, 90.)

32. Trouver la condition que doit vérifier le paramètre α pour que les deux polynômes U et V,

$$U = x^4 \operatorname{séc}^2\alpha - 2x \operatorname{tang}\alpha + 1,$$
$$V = x^4 - 2x^3 \operatorname{tang}\alpha + \operatorname{séc}^2\alpha,$$

admettent un diviseur commun du second degré.

(Hanumenta-Rau, J. E., 222.)

(*Gelin*, **88**, 164.)

33. Rendre calculable par logarithmes la quantité

$$\sin(x+y+z)\sin(x+2y+z) - \sin x \sin(x+y) - \sin z \sin(y+z).$$

(Catalan, J. E., 275.)

(*Baudran*, **89**, 71.)

34. Rendre calculables par logarithmes les quantités suivantes :

1°

$$\sin a \sin(b-c) \operatorname{tang} a + \sin b \sin(c-a) \operatorname{tang} b + \sin c \sin(a-b) \operatorname{tang} c;$$

2°

$$\cos a \sin(b-c) \cot a + \cos b \sin(c-a) \cot b + \cos c \sin(a-b) \cot c.$$

(Sollertinsky, J. E., **379**.)

(*Svechnikoff*, **91**, 259.)

35. Chercher la condition pour que

$$a \sin b\theta - b \sin a\theta = \text{M}(\sin^3\theta).$$ (Greenstreet, J. E., **441**.)

Angles d'un triangle.

36. En nommant A, B, C les trois angles d'un triangle rectiligne quelconque, on a

$$\sin A \sin B \sin(A-B) + \sin B \sin C \sin(B-C) + \sin C \sin A \sin(C-A) + \sin(A-B) \sin(B-C) \sin(C-A) = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} \cos A & \cos B & \cos C \\ \text{séc} A & \text{séc} B & \text{séc} C \\ \text{coséc} A & \text{coséc} B & \text{coséc} C \end{vmatrix} = 0.$$

(N. A., **681**.)

(*De Saint-Prix*, **64**, 72, 143, 371.)

37. Relations d'identité entre les angles d'un triangle rectiligne

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1),$$

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 + 4(\cos A + \cos B + \cos C - 1) + (\cos A + \cos B + \cos C - 1)^2 = 4(\sin B \sin C + \sin A \sin C + \sin A \sin B).$$

(Dupain, N. A., **945**.)

(*Aouit*, **69**, 374.)

38. A, B, C étant les angles d'un triangle rectiligne, on a

$$\frac{\cos A}{\sin B.\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A.\sin C}+\frac{\cos C}{\sin A.\sin B}=2.$$

(DUPAIN, N. A., **1047**.)

(*Heldermann*, **72**, 92.)

39. A, B, C étant les angles d'un triangle rectiligne, on propose de rendre minimum

$$\frac{\sin A}{\sin B.\sin C}+\frac{\sin B}{\sin A.\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A.\sin B}.$$ (DUPAIN, N. A., **1048**.)

(*Gambey*, **72**, 286.)

40. A, B, C étant les trois angles d'un triangle rectiligne, on a

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin^3 A\cos B-\sin^3 B\cos A}=\frac{\sin(B-C)}{\sin^3 B\cos C-\sin^3 C\cos B}$$
$$=\frac{\sin(A-C)}{\sin^3 A\cos C-\sin^3 C\cos A}.$$

(BROCARD, N. C., **130**.)

(*Niewenglowski*, **76**, 362; **79**, 345.) [1]

41. A, B, C étant les trois angles d'un triangle rectiligne, démontrer les formules

$$\sin^2 A+\sin B\sin C\cos A=\sin^2 B+\sin A\sin C\cos B$$
$$=\sin^2 C+\sin A\sin B\cos C.$$

(BROCARD, N. C., **131**.)

(*Niewenglowski*, **77**, 25; **79**, 325.)

42. A, B, C étant les trois angles d'un triangle, on a les formules suivantes :

$$\tang kA+\tang kB+\tang kC=\tang kA\tang kB\tang kC,$$
$$\sin 2kA+\sin 2kB+\sin 2kC=\pm 4\sin kA\sin kB\sin kC,$$
$$\cos 2kA+\cos 2kB+\cos 2kC=-1\pm 4\cos kA\cos kB\cos kC,$$
$$\sin^2 kA+\sin^2 kB+\sin^2 kC=2\pm 2\cos kA\cos kB\cos kC,$$
$$\cos^2 kA+\cos^2 kB+\cos^2 kC=1\pm 2\cos kA\cos kB\cos kC,$$

---

[1] *Voir* aussi, **77**, 67; **78**, 142.

dans lesquelles il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que k est pair ou impair. (GELIN, N. C., 220.)

(*Freson*, 77, 171; 80, 207.) [1]

43. On donne $\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$; et l'on demande $\cot 2\alpha$, A, B, C étant les trois angles d'un triangle rectiligne.

(BROCARD, N. C., 463, 512.)

(*Brocard*, 79, 346; 80, 215.)

44. Dans tout triangle ABC,

$$\sin^3 A \cos(B - C) + \sin^3 B \cos(C - A) + \sin^3 C \cos(C - A) = 3 \sin A \sin B \sin C.$$

(BRILL, M., 448.)

(*Gillet*, 85, 236.)

45. Si $A + B + C = \pi$, démontrer que l'on a

$$\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 3 \cos\tfrac{1}{2} A \cos\tfrac{1}{2} B \cos\tfrac{1}{2} C + \cos\tfrac{3}{2} A \cos\tfrac{3}{2} B \cos\tfrac{3}{2} C,$$

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C - 1 = 3 \sin\tfrac{1}{2} A \sin\tfrac{1}{2} B \sin\tfrac{1}{2} C - \sin\tfrac{3}{2} A \sin\tfrac{3}{2} B \sin\tfrac{3}{2} C,$$

$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C = \tfrac{3}{2} + 2 \cos A \cos B \cos C + \tfrac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C,$$

$$\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C = \tfrac{1}{2} - 2 \cos A \cos B \cos C + \tfrac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C.$$

(GELIN, M., 607.)

(*François*, 88, 211.)

46. Si A, B, C sont les angles d'un triangle,

$$S \sin^2(A - B) - S \sin(A - B) \sin(A - C) \cos A = \tfrac{1}{2}(1 - 8 \cos A \cos B \cos C) S \sin^2 A.$$

(EDWARDS, M., 719.)

(*Lemoine*, 91, 211.)

---

[1] *Voir* aussi 77, 145.

47. A, B, C étant les angles d'un triangle rectiligne : 1° démontrer que l'expression

$$2\left(\operatorname{tang}\frac{A}{4}+\cot\frac{A}{4}\right)-\cot\frac{A}{4}\left(1-\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)\left(1+\operatorname{tang}\frac{B}{4}\right)\left(1+\operatorname{tang}\frac{C}{4}\right)$$

conserve la même valeur quand on effectue sur les lettres A, B, C une permutation circulaire.

2° Mettre sous une forme symétrique la valeur commune aux trois quantités que l'on peut ainsi former.

(Catalan, J. E., **210**.)

(*Boutin,* **87**, 263.)

48. Si A, B, C sont les angles d'un triangle, on a

$$1+\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)+\sin\left(C+\frac{B}{2}\right)+\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)$$
$$=4\cos\frac{B-A}{4}\cos\frac{C-B}{4}\cos\frac{A-C}{4}.$$ (Boutin, J. E., **235**.)

(*Chapron,* **88**, 214.)

49. Si $A+B+C=\pi$, démontrer que l'on a

1°

$$\Sigma\cos 3A\cos(B-C)+4\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=1;$$

2°

$$\Sigma\cos^3 A\cos(B-C)+\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)$$
$$-3\cos A\cos B\cos C-1=0;$$

3°

$$\Sigma\cos 3A\cos^3(B-C)+3\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)$$
$$-\cos 3A\cos 3B\cos 3C-1=0;$$

4°

$$\Sigma\sin^4 A\sin(B-C)$$
$$+16\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}(C-A)$$
$$\times\left[\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C+\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\cos\tfrac{1}{2}(C-A)\right]=0;$$

5°

$$\operatorname{tang}^2 A\operatorname{tang}^2 B\operatorname{tang}^2 C-\operatorname{tang}^2 A-\operatorname{tang}^2 B\operatorname{tang}^2 C$$
$$=2+2\operatorname{séc}A\operatorname{séc}B\operatorname{séc}C;$$

6°

$$(1 + \tan\tfrac{1}{4} A)(1 + \tan\tfrac{1}{4} B)(1 + \tan\tfrac{1}{4} C) = 2 + 2 \tan\tfrac{1}{4} A \tan\tfrac{1}{4} B \tan\tfrac{1}{4} C;$$

7°

$$(1 + \cot\tfrac{1}{4} A)(1 + \cot\tfrac{1}{4} B)(1 + \cot\tfrac{1}{4} C) = 2 + 2 \cot\tfrac{1}{4} A \cot\tfrac{1}{4} B \cot\tfrac{1}{4} C;$$

8°

$$(2 + \tan\tfrac{1}{4} A + \cot\tfrac{1}{4} A)(2 \tan\tfrac{1}{4} B + \cot\tfrac{1}{4} B)(2 \tan\tfrac{1}{4} C + \cot\tfrac{1}{4} C) = 4(2 + \tan\tfrac{1}{4} A \tan\tfrac{1}{4} B \tan\tfrac{1}{4} C + \cot\tfrac{1}{4} A \cot\tfrac{1}{4} B \cot\tfrac{1}{4} C).$$

(Gelin, J. E., 279.)

Autres angles particuliers.

50. Démontrer les formules

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16},$$

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}.$$ (Lindmann, N. A., 813.)

(*Driant*, **67**, 383, 471.)

51. Si A, B, C sont trois angles dont la somme algébrique est égale à un multiple impair de π, on a

$$\sin A \sin(A - B) \sin(C - A) + \sin B \sin(B - C) \sin(A - B) + \sin C \sin(C - A) \sin(B - C) = \sin 2A \sin 2B \sin 2C - \sin A \sin B \sin C.$$ (Realis, M., 89.)

(*Pisani*, **82**, 90.)

52. Si A, B, C sont trois angles dont la somme algébrique est égale à un multiple impair de π, on a

$$\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \text{séc} A & \text{séc} B & \text{séc} C \\ \text{coséc} A & \text{coséc} B & \text{coséc} C \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \cot 2A & \cot 2B & \cot 2C \\ \text{coséc} 2A & \text{coséc} 2B & \text{coséc} 2C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Realis, M., 90.)

(*Pisani*, **82**, 91.)

53. Lorsque $a + b + c = k\pi$,

$$\sin^5 a \sin(b - c) + \sin^5 b \sin(c - a) + \sin^5 c \sin(a - b) = \sin a \sin b \sin c \sin(a - b) \sin(b - c) \sin(c - a).$$

(Van de Berg, M., **139**.)

(*Gillet*, **83**, 44.)

54. Démontrer que, si $x = \frac{2\pi}{13}$,

$$(\cos x + \cos 5x)(\cos 2x + \cos 3x)(\cos 4x + \cos 6x) = -\tfrac{1}{8}.$$

(Graves, M., **554**.)

(*Emmerich*, **88**, 22.)

55. Soit $\alpha + \beta + \gamma + \delta = (2n + 1)\pi$. Démontrer l'égalité des expressions suivantes

$$(\sin\alpha \sin\beta + \sin\gamma \sin\delta)(\sin\alpha \sin\gamma + \sin\beta \sin\delta)(\sin\alpha \sin\delta + \sin\beta \sin\gamma),$$
$$(\cos\alpha \cos\beta + \cos\gamma \cos\delta)(\cos\alpha \cos\gamma + \cos\beta \cos\delta)(\cos\alpha \cos\delta + \cos\beta \cos\gamma),$$
$$\tfrac{1}{4}(-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta)(\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta)(\ldots)(\ldots)$$
$$\tfrac{1}{4}(-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta)(\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta)(\ldots)(\ldots),$$
$$\tfrac{1}{16}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\delta)^2,$$
$$\sin^2(\alpha + \beta)\sin^2(\alpha + \gamma)\sin^2(\alpha + \delta).$$

(Wolstenholme, M., **626**.)

(*Gelin*, **88**, 277.)

56. Calculer le sinus de 333°. (J. E., **190**.)

(*Bourdier*, **87**, 70.)

Équations et inégalités.

57. Résoudre l'équation

$$(1 + k)\frac{\cos x \cos(2x - \alpha)}{\cos(x - \alpha)} = 1 + k \cos 2x.$$

(Catalan, M., **167**.)

(*De Graeve*, **82**, 249.)

58. L'expression

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} + \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},$$

où φ désigne un angle quelconque, est comprise entre $a+b$ et $\sqrt{2a^2+2b^2}$. (MISTER, M., 187.)

(*Cesaro*, **83**, 211.)

59. L'expression

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$$

est comprise entre

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2a^2+2b^2}}. \quad \text{(M., 222.)}$$

(*Servais*, **83**, 212.)

60. Si n est négatif et plus grand que -1, l'expression

$$\frac{1}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} + \frac{1}{(1+n\cos^2\varphi)\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$$

est comprise entre

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{(1+n)b} \quad \text{et} \quad \frac{4}{(1+\frac{1}{2}n)\sqrt{2a^2+2b^2}}.$$

(M., 223.)

(*Mansion*, **83**, 213.)

61. Résoudre l'équation

$$\sin(a-x)\sin(b-x)\sin(c-x)\sin(d-x) = \sin^4 x,$$

sachant que

$$a+b+c+d = 2\pi. \quad \text{(TUCKER, M., 469.)}$$

(*Tucker*, **87**, 99.)

62. Démontrer que l'équation

$$m^2\cos\alpha\cos\beta + m(\sin\alpha + \sin\beta) + 1 = 0$$

détermine deux valeurs α', α'' de l'angle α, satisfaisant à l'égalité

$$m^2 \cos\alpha' \cos\alpha'' + m(\sin\alpha' + \sin\alpha'') + 2 = 0.$$

(WRIGHT, M., **484**.)

(*Beyens*, **86**, 70.)

63. Résoudre et discuter l'équation

$$\sin\left(45° + \frac{3x}{2}\right) = h \sin\left(45° - \frac{x}{2}\right).$$

(DE LONGCHAMPS, J. E., **169**.)

Martin, **86**, 164.)

64. Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{q} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{p}.$$ (HUMBERT, J. E., **389**.)

65. Chercher la condition pour que

$a \sin b\theta - b \sin a\theta = \mathrm{M}(\sin^3\theta)$. (GREENSTREET, J. E., **441**.) (¹)

Systèmes d'équations.

66. Calculer les valeurs des angles x et y qui satisfont aux relations

$$(2 + \cos 2x + \sin 2x)\sin 2y + (\cos x + \sin x)\cos 2y = 0,$$
$$2(\cos 2x - \sin 2x)\sin y + (\cos x - \sin x)\cos y = 0.$$

(N. C., **585**.)

(*Catalan*, **80**, 561.)

***67**. Résoudre le système d'équations

$$x \sin a + y \sin 2a = \sin 3a,$$
$$x \sin b + y \sin 2b = \sin 3b.$$ (M., **130**.)

(*Noé*, **82**, 202.)

(¹) *Voir* plus haut, énoncé **35**, p. 51. Cette question, non résolue, peut figurer sans inconvénients dans les deux subdivisions où elle a été placée.

68. Résoudre le système d'équations

$$x \sin a + y \sin 2a + z \sin 3a = \sin 4a,$$
$$x \sin b + y \sin 2b + z \sin 3b = \sin 4b,$$
$$x \sin c + y \sin 2c + z \sin 3c = \sin 4c.$$

Trouver pour les inconnues des expressions sans dénominateur. (M., **131**.)

(*Lambert*, **82**, 203.)

69. Démontrer que les équations

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}\cot a = \cos b, \qquad \cos a = \cot b \cot\frac{1}{2}b, \qquad 2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} = 1$$

sont une conséquence l'une de l'autre. (NEUBERG, M., **279**.)

(*Gelin*, **84**, 47.)

70. Déterminer x et y d'après les équations

$$x(1+\sin^2\theta - \cos\theta) - y\sin\theta(1+\cos\theta) = c(1+\cos\theta),$$
$$y(1+\cos^2\theta) - x\sin\theta\cos\theta = c\sin\theta,$$

et éliminer θ entre ces deux équations.

(WOLSTENHOLME, J. E., **28**.)

(*Jacquemet*, **82**, 143.)

71. Étant données les équations

$$\cos x + \cos y = 2\rho\cos\alpha,$$
$$\sin x + \sin y = 2\rho\sin\alpha,$$

trouver l'équation qui admet pour racines

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}y. \quad \text{(J. E., 80.)}$$

(*Naura*, **83**, 156.)

TRIGONOMÉTRIE PLANE.

—

Résolutions de triangles.

72. On a mesuré les trois côtés a, b, c d'un triangle rectiligne ABC; α, β, γ sont les erreurs *absolues* respectives qu'on peut commettre sur la mesure des trois côtés a, b, c. Évaluer l'influence de ces erreurs sur les angles A, B, C.

(Caillet, N. A., **423**.)

(**59**, 277.)

73. Même question que la précédente pour le triangle sphérique. (Caillet, N. A., **424**.) ([1]).

74. Démontrer que, dans les formules relatives à la résolution des triangles rectilignes, il est permis de remplacer les côtés a, b, c respectivement par

$$a \cos A \cos 2A \ldots \cos 2^{n-1} A,$$
$$b \cos B \cos 2B \ldots \cos 2^{n-1} B,$$
$$c \cos C \cos 2C \ldots \cos 2^{n-1} C,$$

et les angles A, B, C par

$$p\pi \pm 2^n A, \quad q\pi \pm 2^n B, \quad r\pi \pm 2^n C,$$

où n désigne un nombre entier et positif quelconque et p, q, r des nombres entiers dont les valeurs et les signes ne sont pas arbitraires.

On a, par exemple,

$$\pm \cos 2^n C = \frac{(a \cos A \ldots \cos 2^{n-1} A)^2 + (b \cos B \ldots \cos 2^{n-1} B)^2 - (c \cos C \ldots \cos 2^{n-1} C)^2}{2(a \cos A \ldots \cos 2^{n-1} A)(b \cos B \ldots \cos 2^{n-1} B)}.$$

(I.-W.-L. Glaisher, N. A., **1170**.)

(*Pravaz*, **76**, 184.)

---

[1] Bien que cette question se rapporte à la Trigonométrie sphérique, et non à la Trigonométrie plane, on l'a maintenue dans cette subdivision à cause de sa corrélation étroite avec l'énoncé qui précède.

75. On donne les bissectrices α, β des deux angles aigus A, B d'un triangle rectangle ABC; calculer les valeurs des côtés et des angles A, B du triangle. Discussion. Nombre des solutions. (N. A., **1327**.)

(*Moret-Blanc*, **80**, 464.)

76. Résoudre un triangle rectangle, connaissant les rayons des cercles inscrits dans les deux triangles dans lesquels le triangle cherché est décomposé par la droite menée du sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse. (M., **49**.)

(*Lambert*, **81**, 131.)

77. Résoudre ou construire un triangle rectangle, connaissant la somme des côtés de l'angle droit et la somme de deux droites qui, menées par le sommet de l'angle droit, partagent l'hypoténuse en trois parties égales. (M., **550**.)

(*Déprez*, **87**, 145.)

78. Connaissant l'angle A d'un triangle, le côté opposé BC et l'angle φ compris entre les droites joignant A aux points D, E qui divisent BC en trois parties égales, calculer les angles B et C. Examiner le cas particulier où $A = \frac{1}{2}\pi$.

Généraliser la question en supposant que DE est l'une quelconque des n parties égales dans lesquelles BC est divisé. (M. Baker, M., **559**.)

(*Campbell*, **88**, 53.)

79. Résoudre un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et le produit d'un des côtés inconnus par la somme ou la différence de ces deux côtés. (J. M., **270**.)

(*Joly*, **81**, 160.)

80. Résoudre un triangle dont on donne un élément linéaire (côté, bissectrice, etc.), sachant en outre :

1° Que le rapport du carré de chacune des hauteurs au rectangle des segments qu'elle détermine sur la base correspondante est exprimé par un nombre entier;

2° Que le produit des trois hauteurs est un multiple du produit de trois segments non consécutifs déterminés par ces hauteurs sur les côtés opposés. (GEOFFROY, J. M., 282.)

(*Geoffroy*, **81**, 161, 252.)

Triangles quelconques. — Formules.

81. Démontrer que l'aire d'un triangle ABC a pour expression

$$\frac{(p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C}{2\left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)}.$$

(THIRY, M., 421.)

(*Pisani*, **85**, 191, 223.)

82. Dans tout triangle ABC, on a

$$\frac{a^2 \cot\frac{1}{2}A + b^2 \cot\frac{1}{2}B + c^2 \cot\frac{1}{2}C}{a^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}A + b^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}B + c^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}C} = \frac{R+r}{R-r}.$$

(KNOWLES, M., 580.)

(*Beyens*, **88**, 54.)

83. Dans tout triangle ABC, on a

$$c^n = a^n \cos nB + na^{n-1} b \cos[(n-1)B - A]$$
$$+ \frac{n(-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 \cos[(n-2)B - 2A] + \ldots + b^n \cos nA.$$

(BRILL, M., 589.)

(*Laisant*, **88**, 102.) [1].

---

[1] Généralisation.

84. Dans tout triangle ABC, on a

$$c^n - nabc^{n-2}\cos(A-B) + \frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2c^{n-4}\cos 2(A-B) - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^3b^3c^{n-6}\cos 3(A-B) + \ldots = a^n \cos nB + b^n \cos nA.$$

(Brill, M., **633**.)

(*Beyens*, **89**, 276.)

85. Dans tout triangle ABC, on a

$$(a \operatorname{tang} B - 2r)(b \operatorname{tang} C - 2r)(c \operatorname{tang} A - 2r) = (a \operatorname{tang} C - 2r)(b \operatorname{tang} A - 2r)(c \operatorname{tang} B - 2r),$$

r étant le rayon du cercle inscrit. (Mandart, M., **704**.)

(*Delahaye*, **91**, 146.)

86. Dans tout triangle ABC, on a

$$(a \operatorname{tang} B - 2\gamma)(b \operatorname{tang} C - 2\alpha)(c \operatorname{tang} A - 2\beta) = -(a \operatorname{tang} C - 2\beta)(b \operatorname{tang} A - 2\gamma)(c \operatorname{tang} B - 2\alpha),$$

α, β, γ étant les rayons des cercles exinscrits respectivement dans les angles A, B, C. (Gelin, M., **708**.)

(*Delahaye*, **91**, 146.)

87. Dans un triangle, on a :

1°

$$\sum \frac{\cos B - \cos C}{p-a} = 0,$$

2°

$$\Sigma(p-a)(b-c)\cos A = 0,$$

3°

$$(p-c)(b+c)\cos A + p(a-c)\cos B = (p-a)(a+b)\cos C.$$

(De Longchamps, J. E., **220**.)

(*Boutin*, **88**, 142.)

88. Dans tout triangle rectiligne :

$$1^\circ \quad \frac{b^2c^2\sin^4 A - a^4(\cos A\cos B + \cos C\cos^2 B)}{c^2a^2\sin^4 B - b^4(\cos A\cos B + \cos C\cos^2 A)} = \text{const.};$$

$$2^\circ \quad b\left(\tan g\frac{A}{2} + \tan g\frac{B}{2}\right) + c\left(\tan g\frac{A}{2} + \tan g\frac{C}{2}\right) = \frac{2a}{\sin A}.$$

(CATALAN, J. E., **377**.)

(*Sollertinsky, Michel,* **91**, 165; **92**, 40.)

89. Dans tout triangle rectiligne, on a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{p-a} & \cos A & 1 \\ \dfrac{1}{p-b} & \cos B & 1 \\ \dfrac{1}{p-c} & \cos C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(DE LONGCHAMPS, J. E., **378**.)

(*Poulain, Youssoufian,* **91**, 166, 234, 254.)

90. Soient a, b, c les longueurs de trois côtés BC, CA, AB d'un triangle; et α, β, γ les angles que forment ces côtés avec une direction fixe quelconque, dans un plan, ces angles étant comptés de *zéro* à 2π. Démontrer que l'on a

$$a^3\cos^3\alpha + b^3\cos^3\beta + c^3\cos^3\gamma = 3abc\cos(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$a^3\sin^3\alpha + b^3\sin^3\beta + c^3\sin^3\gamma = 3abc\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

(LAISANT, J. E., **420**.)

(*Boutin,* **92**, 260.)

Triangles quelconques. — Propriétés et Problèmes.

91. Si les distances des trois sommets d'un triangle ABC, au centre du cercle inscrit, sont proportionnelles aux distances des trois sommets d'un autre triangle *abc*, au centre du cercle

inscrit dans ce triangle, les deux triangles ABC, *abc* seront semblables. (N. A., **13.**)

(*Roux,* **42**, 428; **48**, 61.)

92. On donne la base AB d'un triangle ABC et la somme des cotangentes des trois angles. Démontrer que le lieu du sommet C se compose de deux circonférences de cercles.

(NEUBERG, M., **127.**)

(*Polet,* **82**, 186, 242.)

93. Soient AD, BE, CF les hauteurs du triangle ABC, et X, Y, Z les projections de D, E, F respectivement sur CA, AB, BC. Démontrer que

$$\operatorname{tang} XYA = \operatorname{tang} YZB = \operatorname{tang} ZXC = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C.$$

(TAYLOR, M., **443.**)

(*Boedt,* **86**, 20.)

94. Les médianes d'un triangle forment avec les côtés qu'elles divisent en deux parties égales des angles comptés dans le même sens de rotation, dont la somme des cotangentes est nulle.

(BERMANN, J. M., **119.**)

(*Jimenez,* **79**, 56.)

95. Prouver que la portion du diamètre du cercle circonscrit à un triangle ABC comprise entre le sommet A et le côté opposé BC est égale à

$$\frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\sin 2B + \sin 2C}.$$

(J. M., **135.**)

(*Landre,* **79**, 220.)

96. Si l'on divise la base BC d'un triangle en trois parties égales aux points Q et R, démontrer les égalités suivantes

$$\sin BAR \sin CAQ = 4 \sin BAQ \sin CAR,$$

$$(\cot BAQ + \cot QAR)(\cot CAR + \cot RAQ) = 4 \operatorname{cos\acute{e}c}^2 QAR.$$

(J. M., **144.**)

(*Zuloaga,* **79**, 317.)

97. Du pied A′ d'une des hauteurs AA′ d'un triangle ABC, on mène les perpendiculaires A′D, A′E, A′K, A′L respectivement sur les côtés AB, AC et sur les deux autres hauteurs BB′, CC′ du triangle ABC. Démontrer :

1° Que les quatre points D, H, L, E sont en ligne droite;

2° Qu'en appelant S la surface du triangle ABC, la surface du triangle A′DE a pour expression

$$S \sin B \sin C \cos B \cos C;$$

3° Que la hauteur A′P du triangle A′DE a pour expression

$$2R \sin B \sin C \cos B \cos C,$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

(Perrin, J. M., **204**.)

(*Renaud,* **80**, 397.)

98. Trouver le plus grand des triangles inscrits dans un cercle donné, pour lesquels la différence de deux angles est constante. (J. M., **225**.)

(*Sicard,* **80**, 500.)

99. Du point milieu D du côté BC du triangle ABC, on élève la perpendiculaire DEF et on la prolonge jusqu'à sa rencontre avec les deux autres côtés AB, AC aux points F, E. On pose $DE = a$, $DF = b$ et l'angle $ABC = \alpha$ et l'on propose de démontrer que la surface du triangle ABC est donnée par la formule

$$\frac{2ab^2 \cot \alpha}{a+b}.$$

Montrer que, si l'angle BAC est droit, alors la surface du triangle est donnée par

$$\frac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}.$$

(Russo, J. E., **200**.)

(*Pangaut,* **87**, 255.)

100. Sur les côtés d'un triangle FGL, on prend $FK = f$,

$GI = g$; puis on trace les perpendiculaires KN, IN à ces côtés. Prouver que

$$\overline{LN}^2 = \frac{1}{\sin^2 L}(f^2 + g^2 + l^2 - 2gl\cos G - 2fl\cos F - 2fg\cos L).$$

(CATALAN, J. E., 289.)

(*Beyens*, **90**, 111.)

101. PQR est la ligne de Simson d'un triangle ABC relative au point M. On voit MA, MB, MC sous les angles A', B', C', du centre de la circonférence du cercle circonscrit à ABC.

Démontrer que

$$\sin^2 A'.\sin A.\frac{MP}{QR} = \sin^2 B'.\sin B.\frac{MQ}{RP} = \sin^2 C'.\sin C.\frac{MR}{PQ}.$$

(GREENSTREET, J. E., 440.)

Triangles particuliers. — Propriétés et Problèmes.

102. Quelle relation doit exister entre le côté d'un triangle isoscèle et la base, pour que la bissectrice de l'angle à la base ait un rapport donné avec le côté du triangle?

(VIÈTE, N. A., 135.)

(*Marqfoy*, **50**, 51, 279.)

103. Soient AOB, AO'B deux triangles rectangles en O et O', I étant un point quelconque pris sur l'hypoténuse AB; le produit tang IOA.tang IO'B est constant. (STEINER, N. A., 222.)

(*Marqfoy*, **50**, 146.)

104. ABC étant un triangle rectangle en A, soit φ l'angle compris entre la médiane et la bissectrice menées par B. Démontrer que $\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\frac{1}{2}B$. (TUCKER, M., 406.)

(*Blondeel*, **85**, 139.)

105. Si dans le triangle ABC, $B - C = \frac{1}{2}\pi$, on a la relation

$$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2}.$$

(MC. ALISTER, M., 481.)

(*Béjot*, **86**, 21.)

106. Trouver la relation qui existe entre les angles d'un triangle dont l'orthocentre est situé sur la circonférence inscrite. (DE ROCQUIGNY, M., 614.)

(*Beyens*, **89**, 100.)

107. Dans un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, A étant l'angle moyen, on a

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3},\qquad \cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{A}{2}.$$

(BURNIER, J. M., 171.)

(*Hugot*, **80**, 260.)

108. Si, dans un triangle ABC, les côtés a et b sont tels que l'on ait $a=b\sqrt{2}$, démontrer que : 1° la médiane du triangle qui part du sommet A coupe le côté BC sous un angle égal à l'angle A du triangle; 2° que $\cos^2 A=\cos 2B$.

(DE LONGCHAMPS, J. M., 313.)

(*Rivard*, **81**, 351.)

109. Un triangle ABC est tel que l'on puisse, par le point A, mener une sécante AD, faisant avec AB l'angle BAD, tiers de l'angle BAC, en même temps que le point D détermine sur BC un segment BD, tiers du côté BC. Démontrer que les côtés sont liés par la relation

$$a^2b^2=(b^2-c^2)(b^2+8c^2).\quad \text{(J. E., 156.)}$$

(*Édouard*, **85**, 281.)

110. Démontrer que, si les côtés b, c d'un triangle et l'angle compris A vérifient la relation

$$b=4c\cos\left(30^\circ+\frac{A}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{A}{2}\right),$$

1° L'angle A est le double de C;

2° Les côtés a, b, c vérifient l'égalité

$$a^2 = c(b + c);$$

on pourra déduire (par des considérations géométriques) cette seconde propriété de la précédente. (De Longchamps, J. E., 206.)

(*Beyens*, **87**, 260.)

Quadrilatères. — Propriétés et Problèmes.

111. Dans le quadrilatère ABCD on donne : 1° les côtés AB, AD et la diagonale AC; 2° les angles BAC, CAD; on fait passer une circonférence par les trois points B, C, D; soit O le centre. Calculer : 1° la grandeur du rayon; 2° l'excentricité AO; 3° l'angle AOB.

Données :

$$\begin{aligned} AC &= 166255, \\ AB &= 163100, \\ AD &= 147750, \\ CAD &= 114^\circ 2' 12'', \\ BAC &= 27^\circ 5' 17''. \end{aligned}$$

(Kepler, N. A., 420.) [1]

(*Bardin*, **58**, 319.)

112. Si p, q, s désignent respectivement les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et des diagonales d'un quadrilatère, α l'angle de q avec s, β l'angle de s avec p, γ l'angle de p avec q, pour que le quadrilatère soit inscriptible au cercle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\sin 2\alpha}{p^2} + \frac{\sin 2\beta}{q^2} + \frac{\sin 2\gamma}{s^2} = 0.$$

Quelle est la signification géométrique de cette formule ?

(Farjon, N. A., 1589.)

(*Leinekugel*, **92**, 37*.)

---

[1] Cette question est extraite de l'Ouvrage du célèbre astronome, intitulé *Astronomia nova*.

113. Trouver la relation entre les deux angles sous lesquels on voit, d'un point quelconque d'une circonférence, les deux diagonales d'un carré circonscrit. (M., **114**.)

(*Pisani*, **82**, 141.)

114. ABCD étant un quadrilatère convexe quelconque, soient A′, C′, B′, D′ les projections de A, C, B, D respectivement, sur les diagonales BD, AC; soient A″, C″, B″, D″ les projections de A′, C′, B′, D′ respectivement, sur AC, BD, et ainsi de suite. Trouver la limite du rapport

$$\frac{A'B'C'D' + A''B''C''D'' + \ldots}{ABCD}. \quad (\text{M., } 116.)$$

(*Pisani*, **82**, 142.)

115. D'un point P pris dans le plan d'un champ rectangulaire ABCD, on a mesuré les angles α, β, γ, δ sous lesquels on voit respectivement les côtés. Calculer le rapport des dimensions du champ. (Barbarin, M., **168**.)

(*Polet*, **83**, 66.)

116. Soient a, b, c, d les côtés, φ l'angle des diagonales d'un quadrilatère convexe; démontrer que l'aire s'exprime par

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\varphi.(b^2 + d^2 - a^2 - c^2).$$

Déduire de là les deux diagonales en fonction de a, b, c, d, φ. (Barbarin, M., **169**.)

(*Polet*, **83**, 67; **86**, 42.)

117. Soient α, β, γ, δ les angles sous lesquels on voit d'un point intérieur P les côtés d'un carré ABCD. 1° Démontrer les relations

$$(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\gamma)^{-1} + (\operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\delta)^{-1}$$
$$= (\cot\alpha + \cot\gamma)^{-1} + (\cot\beta + \cot\gamma)^{-1} = 1.$$

2° On a la même formule, lorsque α, β, γ, δ désignent les angles PAB, PCD, PBA, PDC. (Miller, Simmons, M., 449.)

(*Gelin*, **85**, 237.)

118. Étant donné un carré ABDE, sur la diagonale AD je prends le point C, tel que $CD = \frac{AD}{3}$; je joins le point B au point C et je forme un triangle ABC. On demande de démontrer, en désignant les côtés et les angles d'après l'usage ordinaire, les propriétés suivantes :

1° $\quad \tang A = 1, \quad \tang B = 2, \quad \tang C = 3,$

2° $\quad \text{aire } ABC = b^2 - a^2 = \frac{c^2}{3}.$

En considérant les segments des côtés et des hauteurs, on a

3° $\quad AB = 3B'C, \quad AC = 2C'B, \quad CA' = \frac{2}{3}A'B.$

4° $\quad AO = 5OA', \quad BO = 2OB', \quad CO = OC'$ (¹).

En prenant le triangle A'B'C' formé par les pieds des hauteurs ABC, on a

5° $\quad \frac{c'}{3} = \frac{b'}{4} = \frac{a'}{5}.$

6° $\quad \text{aire } A'B'C' = \frac{1}{5} \text{aire } ACB.$

7° Le rayon du cercle inscrit au triangle A'B'C' est le $\frac{1}{5}$ de celui du cercle circonscrit au triangle ABC.

(Gambey, J. M., 101.)

(*Hugentobler*, **78**, 186.)

119. Dans un quadrilatère ABCD, nous désignerons par a, b, c, e les côtés; d et d' les deux diagonales, ω leur angle, h_1 et h_2

(¹) O est le point de concours des hauteurs AA', BB', CC' du triangle ABC.

les perpendiculaires abaissées sur la diagonale d et h_3, h_4 les perpendiculaires abaissées sur la diagonale d' ; démontrer les formules suivantes :

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = (d + d')\sin\omega,$$

$$\frac{h_1 + h_2}{h_3 + h_4} = \frac{d'}{d},$$

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{(h_1 + h_2)(h_3 + h_4)}{\sin\omega},$$

$$h_1 h_2 h_3 h_4 = \frac{a^2 b^2 c^2 e^2}{d^2 d'^2}\sin A \sin B \sin C \sin D.$$

(J. M., **248**.)

(*Giroud*, **80**, 546.)

120. Les diagonales $2a$ et $2b$ d'un losange sont vues sous des angles α et β d'un point dont la distance au centre est c ; prouver que l'on a

$$b^2(a^2 - c^2)^2 \operatorname{tang}^2\alpha + a^2(b^2 - c^2)^2 \operatorname{tang}\beta = 4a^2b^2c^2.$$

(Wolstenholme, J. E., **29**.)

(*Deville*, **82**, 234.)

121. Dans tout quadrilatère convexe dont les angles sont A, B, C, D :

1° $$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2} = \sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2};$$

2° $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} = \sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2};$$

3° $$\sin\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}\right) = \sin\frac{B+C}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\right);$$

4° $$\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right)$$
$$=\sin\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{D}{2}\cos\frac{A}{2}\right);$$

5° $$2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+D}{2}$$
$$=-\sin\frac{A}{2}\sin\left(C+\frac{B+D}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B+D}{2}+\sin\frac{D}{2}\sin\frac{C+D}{2}.$$

(CATALAN, J. E., **319**.)

(*Lavieuville*, **90**, 165.)

122. M, N, P étant trois angles consécutifs d'un quadrilatère inscrit, former

$$\Delta=\begin{vmatrix} -\sin(M+N) & \sin M & 0 & \sin N \\ \sin M & -\sin(N+P) & \sin N & 0 \\ 0 & \sin N & \sin(M+N) & \sin M \\ \sin N & 0 & \sin M & \sin(N+P) \end{vmatrix};$$

plus généralement, former

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -h & f & 0 & g \\ f & -h' & g & 0 \\ 0 & g & h & f \\ g & 0 & f & h' \end{vmatrix}.$$

(CATALAN, J. E., **362**.)

(*Sollertinsky*, **91**, 92.)

Constructions et Problèmes divers.

123. Deux cercles étant dans un même plan et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est équivalente au rectangle des rayons. (N. A., **323**.)

(*Devaux*, **56**, 226, 228; **57**, 252.)

124. Soient AB un diamètre d'un cercle et C le centre, et soit pris sur ce diamètre $CP = \frac{1}{3}AC$. Ayant tiré une droite quelconque, par P, rencontrant la circonférence en Q, R, menons les droites BR et QC, et soit S le point de rencontre de QC prolongé avec BR. En désignant l'angle BSQ par ψ, et l'angle CBS par φ, il faut prouver que

$$\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi} = \left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^3.$$ (STREBOR, N. A., **727**.)

(*Massing*, **65**, 326, 328.)

125. On construit, dans le cercle trigonométrique, l'arc

$$2a = AC, \qquad \sin 2a = CP,$$

le point P′ symétrique de P par rapport à OC, D milieu de la corde AC et les droites P′D, P′P. Prouver que l'on a, aux signes près,

$$P'D = \sin 3a, \qquad PP' = \sin 4a.$$

Si l'on construit $\cos 2a = CR$ et R′ symétrique de R par rapport à OC, on aura, aux signes près,

$$R'D = \cos 3a, \qquad P'R = \cos 4a.$$

(CH. LEGRAND, N. A., **1110**.)

(*Demartres*, **73**, 143.)

126. Étant donné l'angle A, construire l'angle B donné par la relation

$$\cos B \operatorname{tang}\frac{B}{2} = \cos A \operatorname{tang}\frac{A}{2}.$$

(GILBERT, N. C., **289**, M., **425**.)

(*Mosnat*, M., **87**, 195.)

127. Trois villes A, B, C sont réunies par des lignes de chemin de fer AB, BC, CA. Le nombre des trains qui arrivent dans chaque ville, plus le nombre de ceux qui en partent, est proportionnel à la distance qui sépare les deux autres villes. Démon-

trer : 1° que le produit du nombre des trains qui circulent entre A et B, par la distance AB (ou le nombre de trains-kilomètres relatif à AB), est proportionnel à $\cos^2 \frac{1}{2} C$.

2° Pour une longueur totale $l = AB + BC + CA$ donnée, la somme des trois produits semblables relatifs à AB, BC, CA est maximum pour $AB = BC = CA$. (HUDSON, M., **16.**)

(*Van Glabbeke,* **81**, 29.)

128. La somme des carrés des tangentes des angles sous lesquels on voit, d'un point quelconque d'une circonférence, les diamètres qui passent par les sommets opposés d'un polygone régulier circonscrit d'un nombre pair de côtés, est constante et égale à

$$\frac{2nk^2}{(k^2-1)^2},$$

$2n$ étant le nombre des côtés du polygone et k le rapport du rayon à l'apothème. (GELIN, M., **486.**)

(*Beyens,* **86**, 118.)

129. Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$b\left(\tang\frac{A}{2} + \tang\frac{B}{2}\right) + c\left(\tang\frac{A}{2} + \tang\frac{C}{2}\right);$$

A, B, C sont les angles d'un triangle rectiligne; b, c les côtés opposés. (CATALAN, M., **690.**)

(Mme *Prime,* **90**, 239.)

130. Construire graphiquement l'angle x donné par l'équation

$$\tang x = \frac{3 \sin\varphi \cos\varphi}{3\cos^2\varphi - 1},$$

où φ est un angle donné. (LAUNOY, J. M., **164.**)

(*Cadot,* **80**, 68.)

131. Sur une droite, à partir d'un point A, on porte des longueurs égales AB, BC, CD, ... à la suite les unes des autres;

au point A, on élève une perpendiculaire AX, et l'on joint X aux divers points de division. Trouver une relation entre les angles sous lesquels on voit du point X les divers segments AB, BC, CD, ... (J. M., 346.)

(*Fiévet*, **81**, 551.)

132. Soient :

OX une droite fixe;

$OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ une série de droites, formant avec OX les angles $a, 2a, \ldots, na$;

$OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_n$ une série de droites formant avec OX les angles $a+\frac{\pi}{2}, 2a+\frac{\pi}{2}, \cdots, na+\frac{\pi}{2}$;

$OC_1, OC_2, \ldots, OC_n$ des longueurs égales à $\cos a$, $\cos 2a$, ..., $\cos na$ respectivement portées (en grandeurs et en signes) sur $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$;

$OS_1, OS_2, \ldots, OS_n$ des longueurs égales à $\sin a$, $\sin 2a$, ..., $\sin na$, respectivement portées (en grandeurs et en signes) sur $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_n$;

C le centre de gravité des points $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

S le centre de gravité des points $S_1, S_2, \ldots, S_n$;

M le milieu de la droite CS.

On propose de démontrer :

1° Que SC est égal à l'unité et parallèle à OX;

2° Que OM est égal à $\frac{\sin na}{2n \sin a}$;

3° Que l'angle MOX est égal à $(n+1)a$. (LAISANT, J. S., 237.)

(*Papelier*, **88**, 66.)

133. Les données étant les mêmes que dans la question précédente, à cette seule différence que les cosinus et sinus sont ceux des arcs b, $2b$, ..., nb (b étant un arc quelconque), on propose de démontrer :

1° Que la droite SC a pour longueur $\dfrac{\sin\dfrac{n(a-b)}{2}}{n\sin\dfrac{a-b}{2}}$ et qu'elle fait avec OX un angle égal à $(n+1)\dfrac{a-b}{2}$;

2° Que OM égale $\dfrac{\sin\dfrac{n(a+b)}{2}}{2n\sin\dfrac{a+b}{2}}$;

3° Que l'angle MOX égale $(n+1)\dfrac{a+b}{2}$.

(LAISANT, J. S., **238**.)

(*Papelier*, **88**, 66.)

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

—

Triangles sphériques.

134. a, b, c étant les trois côtés d'un triangle sphérique et e l'excès sphérique, on a

$$1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+32\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b\cos^2\tfrac{1}{2}c\sin^2\tfrac{1}{2}e$$
$$=\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a+c-b)+\cos(b+c-a).$$

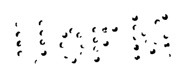
(N. A., **52**.)

(*Hue*, **51**, 25.)

135. Les quatre cercles inscrits dans un triangle sphérique sont touchés par un même cercle.

La tangente du rayon sphérique de ce dernier cercle est la moitié de la tangente du rayon sphérique du cercle circonscrit au triangle. (HART, SALMON, N. A., **578**.)

(*Brocard*, **76**, 183.)



136. Lorsque, dans un triangle sphérique, un angle est égal à la somme des deux autres, on a

$$\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{b}{2} = \sin^2\frac{c}{2}. \quad \text{(Unferdinger, N. C., 253.)}$$

(*Freson*, **77**, 336, 358.)

137. Dans tout triangle sphérique rectangle, on a

$$8\sin^2 p \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C = -\cos(B+C)\cos(B-C),$$

p désignant le demi-périmètre. (Cambier, M., **175**.)

(*Solvay*, **83**, 188.)

138. Soient α, β, γ les inclinaisons des médianes d'un triangle sphérique sur les côtés opposés. Démontrer que

$$\frac{\cot\alpha}{\cos\frac{a}{2}(\cos b - \cos c)} = \frac{\cot\beta}{\cos\frac{b}{2}(\cos c - \cos a)} = \frac{\cot\gamma}{\cos\frac{c}{2}(\cos a - \cos b)}.$$

(Neuberg, M., **268**.)

(*Liénard*, **84**, 23.)

139. Un triangle sphérique est-il isoscèle lorsque deux médianes sont égales? (Marcolongo, M., **320**.)

(*Gelin*, **84**, 209.)

140. Soient A_1, B_1, C_1 les points de rencontre des côtés d'un triangle sphérique ABC par les arcs de grand cercle qui joignent un point quelconque M de la sphère aux sommets opposés. Démontrer la relation

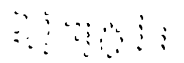
$$\frac{\sin MA_1}{\sin AA_1} + \frac{\sin MB_1}{\sin BB_1} + \frac{\sin MC_1}{\sin CC_1} = \frac{\cos MP}{\cos R},$$

P étant le pôle et R le rayon sphérique du petit cercle ABC.

(Steiner, M., **362**.)

(*Déprez*, **86**, 111.)

141. Si la somme des angles d'un triangle sphérique est égale



à quatre droits, les segments des médianes compris entre leur point de concours et les sommets sont les suppléments des côtés correspondants, et la distance des milieux de deux côtés est égale à un quadrant. Réciproque [1]. (M., **382**.)

(*Pisani*, **87**, 19.)

142. Calculer le côté, l'angle et la hauteur d'un triangle sphérique équilatéral : 1° en fonction du rayon du cercle inscrit; 2° en fonction du rayon du cercle circonscrit. (M., **464**.)

(*Boedt*, **87**, 255.)

143. G étant le point de concours des médianes du triangle sphérique ABC, M un point quelconque de la sphère, démontrer la relation

$$\frac{\cos AM + \cos BM + \cos CM}{\cos GM} = \text{const.} \quad (\text{Déprez, M., } \mathbf{516}.)$$

(*Beyens*, **86**, 239.)

Polygones sphériques.

144. Si par le centre d'un polygone sphérique régulier on fait passer une circonférence de grand cercle et qu'on projette sur cette circonférence tous les arcs menés du centre aux divers sommets, la somme des tangentes carrées des projections est constante, quelle que soit la direction du grand cercle. Elle est égale à la tangente carrée de la distance polaire du cercle multipliée par la moitié du nombre des côtés du polygone.

(Vannson, N. A., **429**.)

(*Bauquenne*, **66**, 35.)

145. Si au lieu des carrés (énoncé précédent) on prend une

---

[1] Les propriétés des trièdres dont la somme des dièdres égale quatre droits, et celles des trièdres dont la somme des faces égale deux droits, s'établissent aisément par la considération des tétraèdres isoscèles.

(*Note de M. Neuberg.*)

puissance quelconque de degré pair et inférieur au nombre des côtés du polygone, on trouve pour somme

$$S_{2p} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots 2p}{1.2.3\ldots p} \frac{N \tang^2 r}{2^{2p}},$$

N étant le nombre des côtés. Les théorèmes analogues ont lieu pour un polygone régulier dans un plan. (VANNSON, N. A., **430**.)

(*Bauquenne*, **66**, 35.)

146. $2S$ étant l'aire d'un quadrilatère sphérique inscrit; a, b, c, d les côtés; $2p$ le périmètre, on a

$$\sin\frac{S}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}\sin\frac{p-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}},$$

$$\cos\frac{S}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a-b}{2}\cos\frac{p-a-c}{2}\cos\frac{p-a-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}}.$$

(GRUNERT, N. A., **662**.)

147. Soit un quadrilatère sphérique ABCD, ayant deux angles opposés droits, A et C. Les projections (sphériques) de deux côtés opposés sur la diagonale AC sont égales.

(CATALAN, M., **135**.)

(*Polet*, **82**, 188.)

148. Soient, dans un quadrilatère sphérique complet, α, β, γ les trois diagonales et (A, A'), (B, B'), (C, C') les angles formés par les côtés aux extrémités des diagonales. Démontrer que

$$\sin A \sin A' \cos\alpha + \sin B \sin B' \cos\beta + \sin C \sin C' \cos\gamma = 0.$$

(MAC-LELLAN, M., **442**.)

(*Van Dorsten*, **87**, 276.)

149. Soient a, b, c, d les côtés et f, g les diagonales d'un

quadrilatère sphérique ABCD. Démontrer que l'angle φ des diagonales est donné par la formule

$$\sin f \sin g \cos\varphi = \cos a \cos c - \cos b \cos d.$$

Déduire de là le théorème correspondant de la Trigonométrie plane. (M., 545.)

(*Beyens*, **88**, 52.)

150. Les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrangle sphérique ABCD étant divisés aux points E, F, G, H de manière que

$$\frac{\sin AE}{\sin BE} = \frac{\sin CF}{\sin BF} = \frac{\sin CG}{\sin DG} = \frac{\sin AH}{\sin DH} = \lambda,$$

démontrer que les arcs de grand cercle EG, FH se coupent en un point I de l'arc joignant les milieux K, L des diagonales AC, BD. Si ces diagonales sont égales, on a $\sin KL : \sin LI = \lambda$.

(TAIT, M., 786.)

Questions diverses.

151. Dans un tétraèdre OABC trirectangle en O, la somme des carrés des tangentes des angles ABO, ACO est égale au carré de la tangente de l'angle dièdre qui a pour arête BC.

(DE SAINT-VENANT, N. A., 216.)

(*Nicolas*, **49**, 442.)

152. Dans un tétraèdre, le produit des sinus des deux angles dièdres opposés est proportionnel au produit des arêtes de ces mêmes angles. (MENTION, N. A., 462.)

(*De Chauliac*, **59**, 204.)

153. Étant donnée une courbe quelconque sur la sphère, d'un point fixe C pris sur la sphère menons à la courbe le rayon vec-

teur sphérique CO; prenons sur ce rayon un point O′ tel, qu'on ait

$$\frac{\sin\frac{CO'}{2}}{\sin\frac{CO}{2}} = \alpha,$$

quantité constante. Le lieu des points O′ forme une seconde courbe telle, qu'on aura : aire de la courbe CO′ est à l'aire de la courbe CO comme $\alpha^2 : 1$. (Vannson, N. A., **579.**)

(*Collot*, **61**, 430.)

154. On donne l'arête de base et la hauteur d'une pyramide régulière dont la base est un carré. Trouver l'angle compris entre deux faces latérales. (Geneix-Martin, N. A., **1499.**)

(*Richard*, **84**, 493.)

155. Étant données l'arête de la base et la hauteur d'une pyramide régulière, trouver l'angle compris entre deux faces latérales dans les cas suivants :

1° La base est un triangle équilatéral;

2° La base est un hexagone;

3° D'une manière générale, la base est un polygone régulier de n côtés. (Geneix-Martin, N. A., **1559.**)

(*De Crès*, **92**, 42*.)

156. Dans tout parallélépipède circonscrit à une sphère, chacune des arêtes d'un angle trièdre est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres arêtes.

(M., **115.**)

(*Lambert*, **82**, 142.)

157. Un plan P est coupé par deux plans verticaux, perpendiculaires entre eux, suivant deux droites D, D′. Soient α, α', β les angles de D, D′, P avec un plan horizontal; démontrer que

$$\tan^2\beta = \tan^2\alpha + \tan^2\alpha'. \quad \text{(M., 198.)}$$

(*Cesaro*, **83**, 142.)

158. Soient r, r' les rayons sphériques de deux petits cercles tracés sur une même sphère et tangents extérieurement, et t la longueur de l'arc du grand cercle qui les touche. Démontrer la relation

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r'}.$$

(Neuberg, M., **366**.)

(*Cesaro*, **85**, 117.)

159. Étant donnés deux petits cercles de rayons r et r', tangents entre eux extérieurement et tangents à un même grand cercle, le rayon sphérique x d'un cercle qui touche les trois précédents vérifie la relation

$$\cot x = \sqrt{\cot x \cot r - 1} + \sqrt{\cot x \cot r' - 1}.$$

(Gillet et Deprez, M., **471**.)

(*Beyens*, **87**, 121.)

160. Soient α, β, γ, δ les angles sous lesquels on voit les diagonales d'un cube, l'œil étant placé en un point quelconque de la sphère inscrite au cube. Démontrer que

$$\operatorname{tang}^2\alpha + \operatorname{tang}^2\beta + \operatorname{tang}^2\gamma + \operatorname{tang}^2\delta = 8.$$

(Clarke, M., **578**.)

(*Gerondal*, **88**, 77.)

161. Un trièdre SABC est tel que le dièdre suivant SA est droit; de plus, on suppose que les faces BSA, ASC sont égales.

En posant

$$\text{BSA} = \text{ASC} = \alpha, \qquad \text{BSC} = \beta,$$

la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique appliquée à un triangle rectangle isoscèle prouve que l'on a

$$\cos \beta = \cos^2\alpha.$$

On propose de reconnaître élémentairement cette relation et d'en déduire la démonstration du théorème suivant :

Si l'on coupe le trièdre considéré par un plan perpendiculaire à l'une des arêtes, le triangle obtenu est rectangle.

(J. E., 334.)

(*De Times*, **90**, 210.)

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

ARITHMÉTIQUE.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Calcul algébrique.

Équations du deuxième degré.

Progressions et séries.

Équations à résoudre.

Systèmes d'équations.

TRIGONOMÉTRIE.

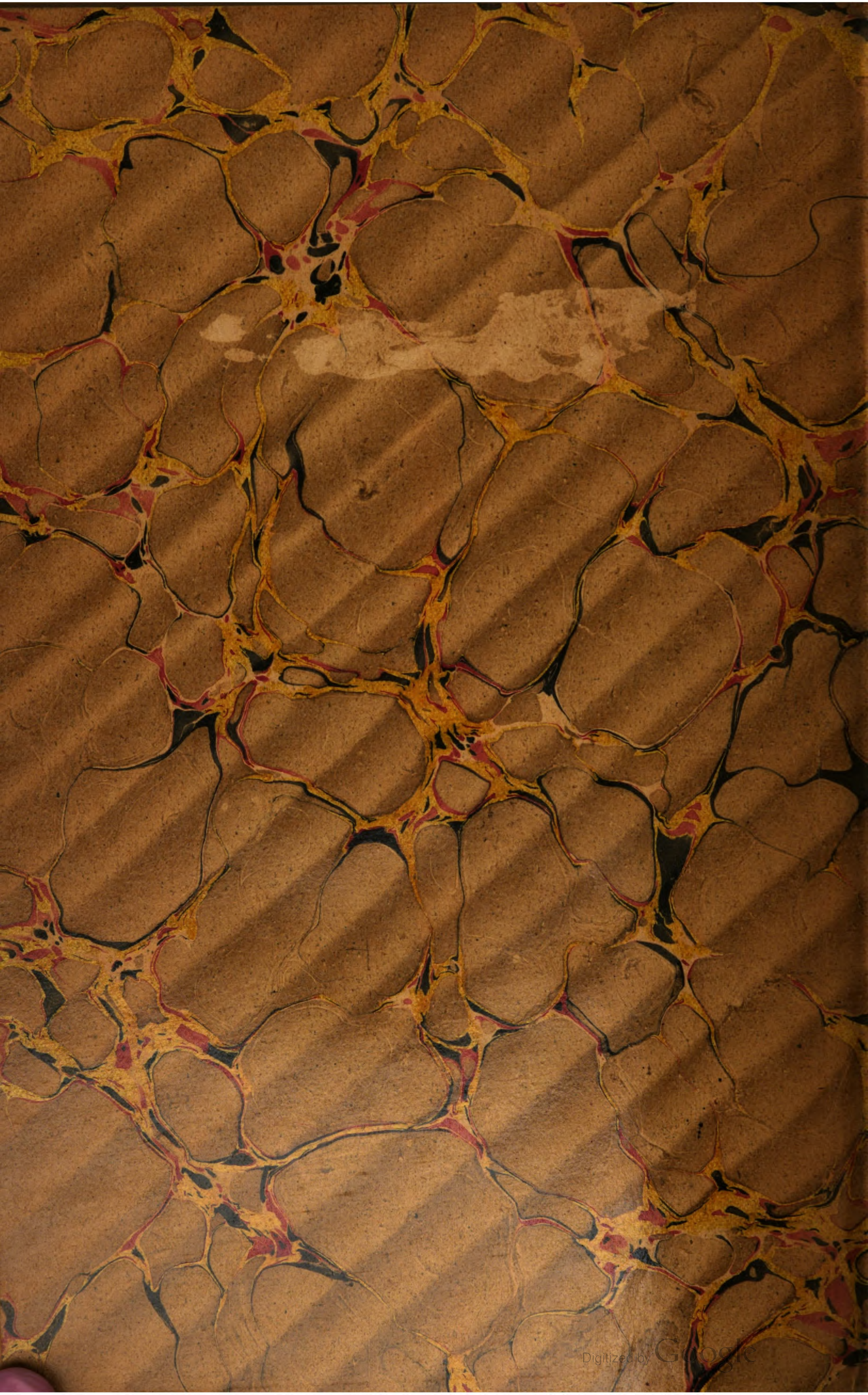
Fonctions circulaires.

Trigonométrie plane.

Trigonométrie sphérique.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

18967 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.




UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06795 9083
LAISANT
QA
43
L 189 r
v. 1
Digitized by Google

